



Flávio Valberto Barrionuevo Rodrigues

**Desenvolvimento de ferramenta  
computacional para análise de seções em  
concreto armado sob flexão composta oblíqua.**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Dissertação orientada pelo Professor Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto  
com coorientação do Professor Dr. Ritermayer Monteiro Teixeira

FLÁVIO VALBERTO BARRIONUEVO RODRIGUES

**Desenvolvimento de ferramenta computacional para  
análise de seções em concreto armado sob flexão composta  
oblíqua.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, do Instituto de Tecnologia – ITEC, da Universidade Federal do Pará – UFPA, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Linha de pesquisa: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto.

Coorientador: Prof. Dr. Ritermayer Monteiro Teixeira

BELÉM – PA

2021

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Flávio Valberto Barrionuevo Rodrigues

TÍTULO: Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de seções em concreto armado sob flexão composta oblíqua.

GRAU: Mestre

ANO: 2021

É concedida à Universidade Federal do Pará permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

**Flávio Valberto Barrionuevo Rodrigues** Av. Augusto Correa, no 1, Campus Universitário do Guamá, Laboratório de Engenharia Civil. Guamá, Belém, Pará. CEP 66075-970

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**  
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

B275d Barrionuevo Rodrigues, Flávio Valberto.  
Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de seções em concreto armado sob flexão composta oblíqua / Flávio Valberto Barrionuevo Rodrigues. — 2021.  
128 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto  
Coorientador(a): Prof. Dr. Ritermayer Monteiro Teixeira  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,  
Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil, Belém, 2021.

1. Flexão Composta Oblíqua. 2. Análise não linear de seções. 3. Concreto Armado. I. Título.

CDD 624

---



---

# DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE SEÇÕES EM CONCRETO ARMADO SOB FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

**AUTOR: FLÁVIO VALBERTO BARRIONUEVO RODRIGUES**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À BANCA  
EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA CIVIL DO INSTITUTO DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
PARÁ, COMO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO

APROVADO EM: 14 / 01 / 2021.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto  
Orientador (UFPA)

Prof. Dr. Mateus Antônio Nogueira Oliveira  
Membro Externo (UFMG)

Prof. Dr. Ritermayer Monteiro Teixeira  
Membro Externo (UFPA)

Prof. Dr. Alcebíades Negrão Macêdo  
Membro Interno (UFPA)

Visto:

---

Prof. Dr. Marcelo de Souza Picanço  
Coordenador do PPGEC / ITEC / UFPA

---

## **AGRADECIMENTOS**

Durante esta caminhada da minha vida eu gostaria de prestar meus sinceros agradecimentos às pessoas que contribuíram direta e indiretamente para que eu concluísse meu objetivo. Essas pessoas em especial são:

- Ao professor Bernardo Nunes de Moraes Neto e à Universidade Federal do Pará, pela oportunidade, pela orientação, pela atenção e paciência no desenvolvimento desta pesquisa, e também por ter indicado o professor Ritermayer Teixeira como coorientador;
- Ao professor Ritermayer Monteiro Teixeira, eu sou abertamente grato por toda a sua disponibilidade em me coorientar e por ter proporcionado grandes momentos de aprendizagem, seja em nossas reuniões semanais para discutir sobre a pesquisa, ou seja, no estágio de docência, o qual tive a satisfação em acompanhá-lo. Também sou grato pela sua forma compreensiva e amigável por ter me aceitado como seu aluno.
- À secretaria do PPGE, a qual não mede esforços para ajudar os alunos em suas demandas e pela forma gentil ao qual somos tratados por todos. Em especial agradecimento à Sanny que é a figura central na qualidade dos serviços prestados pela secretaria, mas também a todos os outros membros ao quais participam diretamente das decisões importantes e que nós não sabemos;
- Aos meus grandes amigos Paulo Monteiro, Saymo Peixoto e José Vitor Borges por terem me ajudado com dúvidas e momentos de estudos para trabalhos e provas, admito que sem o companheirismo e amizade de vocês essa caminhada teria sido mais árdua. Também agradeço aos membros da minha turma de mestrado, que sempre se mostraram amigáveis e receptivos.
- E aos meus pais, pelo encorajamento, amor, incentivo e dedicação para que nada me faltasse neste período. Quero agradecer em especial à minha mãe, por ser essa pessoa maravilhosa que ela é, a qual me deu motivação e forças para persistir nos momentos mais difíceis.

“O primeiro dever da inteligência é desconfiar dela mesma.”

(Albert Einstein)

## RESUMO

RODRIGUES, F.V.B. **Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de seções em concreto armado sob flexão composta oblíqua.** Belém, PPGEC. Universidade Federal do Pará, 2021, dissertação de mestrado.

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta numérica, escrita em linguagem MATLAB™, criada com o objetivo de explorar as metodologias de análise de peças submetidas à flexão composta oblíqua em seções de quaisquer geometrias, constituídas de concreto armado. Foi realizada uma revisão bibliográfica que abordou os aspectos gerais da análise não linear de seções e, posteriormente, fez-se uma revisão sobre os modelos constitutivos, normativos ou não, dos materiais em utilização no problema. Quanto ao aspecto da flexão composta oblíqua, o tema foi abordado para fins de implementação computacional do método de análise de seções, com enfoque no desenvolvimento numérico para determinação dos esforços resistentes internos e rigidezes às solicitações normais. Para integração numérica do campo de tensões na seção, um método de discretização foi implementado com base em Triangulação de Delaunay. A ferramenta permite o processamento dos diagramas e superfícies de interação dos esforços internos, as relações de momento-curvatura-normal e rigidez-curvatura-normal, os quais são úteis para as análises dos estados limites últimos e de serviço. Um pós-processador foi desenvolvido para apresentação gráfica e geração de relatórios com todos os resultados da análise. A validação da ferramenta proposta foi feita com base em exemplos de referência, os quais abordam tanto resultados de estudos experimentais e teóricos consultados na literatura, quanto de aplicações em programas comerciais.

**Palavras-chave:** Flexão composta oblíqua. Análise não linear de seções. Concreto armado.

## **ABSTRACT**

**RODRIGUES, F.V.B. Development of a computational tool for the analysis of reinforced concrete sections under biaxial bending.** Belem, PPGEC. Federal University of Pará, 2021, master's dissertation.

The present work presents the development of a numerical tool, written in MATLAB <sup>TM</sup> programming language, created to explore the methodologies of analysis of members under biaxial bending and axial load in sections of any geometries, made of reinforced concrete. A bibliographic review was carried out that addressed the general aspects of non-linear analysis of sections and, later, a review was made of constitutive models, normative or not, of the materials in use in the problem. As to the aspect of biaxial bending and axial load, the theme was addressed for computational implementation of the section analysis method, focusing on numerical development to determine the internal resistant efforts and stiffness to normal stresses. For the numerical integration of the stress field in the section, a discretization method was implemented based on Delaunay. The tool allows the processing of diagrams and interaction surfaces of internal forces, the moment-curvature-normal and stiffness-normal-curvature relationships, which are useful for analysis of the ultimate and service limit states. A post-processor was developed for graphical presentation and generation of reports with all the analysis outcomes. The validation of the proposed tool was based on reference examples, which address both the results of experimental and theoretical studies consulted in the specialized literature, as well as applications in commercial programs.

**Keywords:** Biaxial bending and axial load. Nonlinear cross section analysis. Reinforced concrete.



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Representação da linha neutra e das tensões em uma seção de concreto armado. (Autor, 2021) .....	19
<b>Figura 2:</b> Representação da flexão composta reta (Autor, 2021).....	20
<b>Figura 3:</b> Representação da flexão composta oblíqua (Autor, 2021).....	20
<b>Figura 4:</b> Superfície de interação para uma peça sujeita à flexão composta oblíqua (adaptado de Kim e Lee, 2017). .....	21
<b>Figura 5:</b> Representação dos vetores de esforços. (Autor, 2021).....	22
<b>Figura 6:</b> Respostas típicas de uma curva de momento-curvatura. Adaptado de Anwar e Najam (2016). .....	24
<b>Figura 7:</b> Relações de momento-curvatura sob influências da variação do esforço normal e do ângulo de inclinação do eixo neutro. Adaptado de Breccolotti <i>et al.</i> (2019). .....	26
<b>Figura 8:</b> Relações de momento-curvatura sob a influências da variação da taxa de armadura e do ângulo de inclinação do eixo neutro. Adaptado de Breccolotti <i>et al.</i> (2019). .....	26
<b>Figura 9:</b> Seção submetida à flexão composta oblíqua. ....	28
<b>Figura 10:</b> Deslocamentos normais à seção: (a) devido ao esforço normal $N$ ; (b) devido ao momento fletor $M_z$ e (c) devido ao momento fletor $M_y$ . ....	28
<b>Figura 11:</b> Elemento infinitesimal submetido a uma deformação normal. ....	29
<b>Figura 12:</b> Distribuição das tensões no concreto para um valor fixo de $z$ . ....	31
<b>Figura 13:</b> Esforço normal em uma área infinitesimal na seção de concreto.....	31
<b>Figura 14:</b> Momento fletor interno em torno do eixo $z$ . ....	32
<b>Figura 15:</b> Momento fletor interno em torno do eixo $y$ . ....	33
<b>Figura 16:</b> Distribuição das tensões no aço para um valor fixo de $z$ . ....	33
<b>Figura 17:</b> Esforço normal resistente devido ao aço. ....	34
<b>Figura 18:</b> Momento fletor interno, no aço, em torno de $z$ . ....	34
<b>Figura 19:</b> Momento fletor interno, no aço, em torno de $y$ . ....	35
<b>Figura 20:</b> Comportamento não linear com relação às deformações generalizadas. ....	36
<b>Figura 21:</b> Esquema de Newton-Rophson aplicado ao problema da flexão composta oblíqua. ....	39
<b>Figura 22:</b> Critério da Circunferência Vazia aplicado aos Triângulos (a) T1 e (b) T2. Adaptado de MATHWORKS (2011). ....	44
<b>Figura 23:</b> Casos que violam uma Triangulação de Delaunay: (a) Triângulo T2; (b) Triângulo T2. Adaptado de MATHWORKS (2011). ....	45
<b>Figura 24:</b> Diferentes níveis de discretização gerados a partir do código <i>RCSectionCode</i> para uma seção celular típica de pontes .....	46
<b>Figura 25:</b> Representação da rotação dos eixos locais. ....	48
<b>Figura 26:</b> Domínios de deformação da NBR 6118 (ABNT, 2014). ....	50
<b>Figura 27:</b> Deformações nas fibras de concreto e aço.....	52
<b>Figura 28:</b> Fluxograma para o cálculo da superfície e diagrama de interação. ....	53
<b>Figura 29:</b> Fluxograma para obtenção da relação $M-\phi-N-\alpha$ . ....	55
<b>Figura 30:</b> Representação da seção transversal dos experimentos de Ramamurthy (1961) e Pallarés <i>et al.</i> (2010). ....	58
<b>Figura 31:</b> Seção transversal retangular em discretização de 5 x 5. ....	61

<b>Figura 32:</b> Superfície de interação correspondente à seção retangular. ....	62
<b>Figura 33:</b> Diagrama de interação correspondente à seção retangular. ....	62
<b>Figura 34:</b> Seção transversal T em discretização 10 x 10. ....	63
<b>Figura 35:</b> Superfície de interação correspondente à seção T. ....	64
<b>Figura 36:</b> Diagramas interação para a seção T. ....	64
<b>Figura 37:</b> Seção transversal L em discretização de 10 x 10. ....	65
<b>Figura 38:</b> Superfície de interação correspondente à seção L. ....	65
<b>Figura 39:</b> Diagrama de interação para a seção em L. ....	66
<b>Figura 40:</b> Seção transversal U em discretização de 12 x 12. ....	66
<b>Figura 41:</b> Superfície de interação correspondente à seção U. ....	67
<b>Figura 42:</b> Diagrama de interações da seção U comparado com Rosati <i>et al.</i> (2008). ....	68
<b>Figura 43:</b> Diagrama de interações da seção U comparado com Vaz Rodrigues (2015). ....	68
<b>Figura 44:</b> Seção transversal G em discretização de 10 x 10. ....	69
<b>Figura 45:</b> Superfície de interação correspondente à seção G. ....	70
<b>Figura 46:</b> Diagramas de interação para a seção G em comparação com Papanikolaou (2012). .....	70
<b>Figura 47:</b> Diagramas de interação para a seção G em comparação com Vaz Rodrigues (2015). .....	71
<b>Figura 48:</b> Seção transversal multicelular em discretização de 10 x 10. ....	71
<b>Figura 49:</b> Superfície de interação correspondente à seção multicelular. ....	72
<b>Figura 50:</b> Diagramas de interação para a seção multicelular em comparação com Papanikolaou (2012). ....	72
<b>Figura 51:</b> Diagramas de interação para a seção multicelular em comparação com Vaz Rodrigues (2015). ....	73
<b>Figura 52:</b> Seção transversal retangular em discretização de 10 x 10. ....	74
<b>Figura 53:</b> Representação dos esforços solicitantes na seção retangular. Adaptado de Silva (2015). ....	74
<b>Figura 54:</b> Representação do fator de solicitação da seção à flexão composta oblíqua. ....	75
<b>Figura 55:</b> Superfície de interação correspondente à seção retangular em flexão composta oblíqua. ....	75
<b>Figura 56:</b> Comparação entre os resultados produzido pelo programa de Silva (2015) e pela ferramenta <i>RCSectionCode</i> . ....	76
<b>Figura 57:</b> Seção transversal vazada com discretização de 10 x 10. ....	77
<b>Figura 58:</b> Representação do fator de segurança da seção. ....	77
<b>Figura 59:</b> Superfície de interação correspondente à seção vazada. ....	78
<b>Figura 60:</b> Diagrama de interação comparando Vaz Rodrigues (2015) e <i>RCSectionCode</i> quanto ao dimensionamento de uma seção vazada. ....	78
<b>Figura 61:</b> Seção transversal “ <i>Staircase</i> ” com discretização de 20 x 20. ....	79
<b>Figura 62:</b> Superfície de interação correspondente à seção “ <i>Staircase</i> ”. ....	80
<b>Figura 63:</b> Representação do fator de solicitação da seção “ <i>Staircase</i> ”. ....	80
<b>Figura 64:</b> Comparação dos diagramas de interação variando o coeficiente $\gamma$ de confinamento para a seção “ <i>Staircase</i> ”. ....	81
<b>Figura 65:</b> Seção retangular estudada por Simão <i>et al.</i> (2016). ....	82
<b>Figura 66:</b> Perfil de tensão deformação da seção retangular em flexão pura. ....	83

<b>Figura 67:</b> Comparação entre os diagramas de momento-curvatura variando a força axial...	83
<b>Figura 68:</b> Seção circular proposta neste trabalho. ....	84
<b>Figura 69:</b> Perfil de deformações e tensões da seção circular proposta. ....	85
<b>Figura 70:</b> Comparação das relações momento-curvatura obtidas a partir da ferramenta <i>RCSectionCode</i> e do SAP2000™ variando a força axial. ....	85
<b>Figura 71:</b> Seção transversal vazada proposta pela AASTHO (2011). ....	86
<b>Figura 72:</b> Perfil de deformações na seção vazada no ângulo $\alpha = 45^\circ$ e $N = -10000$ kN. ....	87
<b>Figura 73:</b> Comparação entre os diagramas de momento-curvatura obtida para diferentes forças axiais e ângulos de inclinação da linha neutra. ....	87
<b>Figura 74:</b> Seção em I proposta pela AASTHO (2011). ....	88
<b>Figura 75:</b> Diagrama de deformações para a seção I em flexão simples. ....	89
<b>Figura 76:</b> Comparação entre os diagramas de momento-curvatura obtida para flexão simples com diferentes ângulos de inclinação da linha neutra. ....	89
<b>Figura 77:</b> Seção transversal da ponte do Suaçuí estudada por Bittencourt <i>et al.</i> (2011). ....	90
<b>Figura 78:</b> Perfil de deformações para a curvatura de 0.005 (1/m) da Ponte do Suaçuí. ....	91
<b>Figura 79:</b> Diagrama comparativo do momento-curvatura para a seção da ponte sobre o rio Suaçuí. ....	91
<b>Figura 80:</b> Evolução da rigidez axial e do momento em relação à curvatura da seção. ....	92

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1:</b> Recomendações para análises segundo a NBR 6118 .....	17
<b>Tabela 2:</b> Modelos constitutivos uniaxiais implementados no programa. ....	18
<b>Tabela 3:</b> Representação do parâmetro $D$ para os domínios de deformação.....	50
<b>Tabela 4:</b> Características de estudos anteriores selecionados para a comparação dos diagramas de interação. ....	57
<b>Tabela 5:</b> Propriedades geométricas das seções do banco de dados. ....	57
<b>Tabela 6:</b> Comparação entre os resultados numéricos e experimentais. ....	58
<b>Tabela 7:</b> Adaptado do Critério de Collins (2001). ....	60
<b>Tabela 8:</b> Classificação segundo o critério de Collins (2001).....	60
<b>Tabela 9:</b> Influência na variação da triangulação de Delaunay no erro relativo ( $er$ ) e no tempo de processamento ( $tp$ ), para $\Delta\alpha = 30^\circ$ e $n_{pd} = 35$ pontos em cada domínio. ....	94
<b>Tabela 10:</b> Influência na variação da discretização da linha neutra no erro relativo ( $er$ ) e no tempo de processamento ( $tp$ ), para $n_{pt} = 50$ fibras triangulares e $n_{pd} = 35$ pontos em cada domínio.....	94
<b>Tabela 11:</b> Influência na variação da quantidade de pontos em cada domínio de deformação no erro relativo ( $er$ ) e no tempo de processamento ( $tp$ ), para $n_{pt} = 50$ fibras triangulares e $\Delta\alpha = 30^\circ$ . ....	95

## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1– JUSTIFICATIVA	13
1.2– OBJETIVO GERAL E OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
<b>2– ANÁLISE DE SEÇÕES TRANSVERSAIS EM CONCRETO ARMADO</b>	<b>16</b>
2.1– MODELOS CONSTITUTIVOS UNIAXIAIS DO CONCRETO E DO AÇO.	17
2.2– SOLICITAÇÕES NORMAIS EM SEÇÕES TRANSVERSAIS	18
2.3 – DOMÍNIOS DE INTERAÇÃO NA FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA.	20
2.4 – RELAÇÕES DO MOMENTO-CURVATURA	23
<b>3- SISTEMATIZAÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE</b>	<b>27</b>
3.1– CAMPO DE DESLOCAMENTOS NORMAIS À SEÇÃO.	27
3.2– CAMPO DE <i>DEFORMAÇÕES</i> NORMAIS À SEÇÃO.	29
3.3– ESFORÇOS INTERNOS RESISTENTES DO CONCRETO.	30
3.4– ESFORÇOS INTERNOS RESISTENTES DO AÇO.	33
3.5 – ESFORÇOS TOTAIS EM UMA SEÇÃO GENÉRICA	36
3.6 – SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.	37
3.7 – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE DA SEÇÃO E VETOR DE ESFORÇOS INTERNOS CORRIGIDOS	39
3.8 – MÉTODO PARA DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO	44
<b>4 – DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO <math>N - M_z - M_y</math> E RELAÇÃO <math>M - \varphi - N - \alpha</math></b>	<b>47</b>
4.1 – INCLINAÇÃO DA LINHA NEUTRA	47
4.2 – DOMÍNIOS DO ESTADO LIMITE ÚLTIMO (ELU)	49
4.3 – MÉTODO DE MARÍN	50
4.4 – OBTENÇÃO DA RELAÇÃO $M-\varphi-N-\alpha$	54
<b>5 – TESTES DE VALIDAÇÃO</b>	<b>56</b>
5.1 – Base de dados	56
5.1.1 – Avaliação do RCSectionCode quanto à previsão dos resultados	59
5.2 – DIAGRAMAS E SUPERFÍCIES DE INTERAÇÃO.	61
5.2.1 – Seção transversal retangular - Rosati <i>et al.</i> (2008).	61
5.2.2 – Seção transversal em T – Rosati <i>et al.</i> (2008)	63
5.2.3 – Seção transversal em L – Rosati <i>et al.</i> (2008).	64
5.2.4 – Seção transversal em U	66

5.2.5 – Seção transversal em G.....	69
5.2.6 – Seção transversal multicelular. ....	71
5.2.7 - Seção transversal retangular. ....	73
5.2.8 – Seção transversal vazada. ....	76
5.2.9 – Seção “ <i>Staircase</i> ” .....	79
5.3 – RELAÇÃO $M-\Phi-N-A$ .....	81
5.3.1 – Seção retangular – Simão et al. (2016) .....	81
5.3.2 – Seção Circular.....	83
5.3.3 – Seção AASTHO retangular vazada .....	85
5.3.4 – Seção AASTHO em I .....	87
5.3.5 – Seção da ponte do Suaçuí .....	89
<b>6 – ANÁLISE PARAMÉTRICA .....</b>	<b>93</b>
<b>7 – CONCLUSÃO E SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>96</b>
7.1 – SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....	97
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>99</b>
<b>ANEXO 1 – MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS. ....</b>	<b>103</b>
<b>ANEXO 2 – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON .....</b>	<b>111</b>
<b>ANEXO 3 – INFORMAÇÕES DETALHADAS SOBRE AS SEÇÕES TRANSVERSAIS UTILIZADAS COMO TESTE. ....</b>	<b>113</b>
<b>ANEXO 4 – INSTRUÇÕES PARA MANUSEIO DO <i>RCSECTIONCODE</i>. ....</b>	<b>121</b>

## 1 – INTRODUÇÃO

O estudo de seções submetidas à flexão composta oblíqua é um recorrente tema da Engenharia civil e pode ser encontrado desde a consideração para dimensionamento de um pilar em uma edificação qualquer até uma análise mais criteriosa de uma obra de arte submetida às ações sísmicas. Entre as principais metodologias para análise de membros estruturais sob flexão composta oblíqua estão aquelas baseadas em superfícies e diagramas de interação das seções transversais, que permitem avaliar as diferentes relações entre os esforços resistentes.

Anteriormente à expansão das ferramentas computacionais, o procedimento de cálculo para as superfícies e diagramas de interação eram demorados e árduos, por isso, convencionou-se utilizar fórmulas simplificadas de aproximação e ábacos, a exemplo dos métodos presentes em códigos normativos, NBR 6118 (ABNT, 2014), ACI 318 (ACI, 2019) e EUROCODE 8 (EN 1998-1, 2005), bem como métodos propostos na literatura, como os estudados nos trabalhos de Bressler (1960) e Hsu (1988). Entretanto, o uso de métodos simplificados, em alguns casos, pode ser inadequado e não fornece informações pertinentes quanto às propriedades da seção transversal, isto é, o ponto de fissuração, o escoamento das armaduras e a ductilidade da seção.

Com o intuito de desenvolver uma ferramenta capaz de analisar quaisquer formas geométricas das seções de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua, será apresentada neste trabalho o programa *RCSectionCode*, que reúne um conjunto de rotinas escritas em linguagem MATLAB™ (MATHWORKS, 2011), as quais utilizam o método de Triangulação de Delaunay (DELAUNAY, 1934; DE BERG et al., 2008) para a discretização da seção transversal, e permitem uma avaliação não linear física com base em diferentes modelos constitutivos uniaxiais dos materiais. Para o pós-processamento dos resultados, é possível gerar os gráficos das superfícies e diagramas de interação, além dos gráficos para análise do momento-curvatura-normal, rigidez-curvatura-normal e relatórios em arquivos de saída.

Sendo assim, o aperfeiçoamento de técnicas e ferramentas de cálculo para a flexão composta oblíqua contribui para o avanço da compreensão em análise e dimensionamento estrutural, além de fornecer mais subsídios para uma avaliação de estados limites últimos e de serviço.

### 1.1 – Justificativa

O desenvolvimento da engenharia de estruturas civis não está concentrado somente na construção de novos empreendimentos, mas também na análise e verificação de estruturas já

existentes, sendo capaz de realizar estudos sobre a viabilidade de uma expansão das condições de serviço sem que haja danos irremediáveis à estrutura. Nesse contexto, a análise estrutural não é realizada apenas para fins de dimensionamento e projeto dos membros estruturais, mas também para a avaliação/verificação da capacidade resistente dos elementos já construídos.

Para uma análise completa de todos os efeitos e combinações de solicitações, é necessário o auxílio de alguma ferramenta computacional que agilize os procedimentos de verificação. Portanto, o desenvolvimento de uma ferramenta que auxilie na análise de qualquer seção em um projeto de aumento de carregamento é compreensível, ainda que tal ferramenta tenha sido criada apenas para fins de verificação e não de dimensionamento.

Nesse sentido, somente uma análise numérica de solicitações seria um tanto limitante, então uma análise comparativa com as condições dos estados limites de serviço (ELS) e estado limite último (ELU) também é conveniente. Para que isso seja realizado, é necessário considerar a não linearidade dos materiais, o que leva a um problema matemático envolvendo a solução de sistemas não lineares de equações ao nível das seções, cuja solução envolve a integração do campo de tensões para fins de determinação dos esforços resistentes e rigidezes.

Assim, o desenvolvimento de uma ferramenta que seja capaz de realizar tais análises de forma eficiente e com aceitável nível de precisão, com a aplicação de técnicas e que sejam de fácil manuseio, tanto para a comunidade técnica quanto a acadêmica, é uma necessidade atual e justifica os esforços de pesquisas nesse campo.

## **1.2 – Objetivo geral e objetivos específicos**

O presente trabalho tem como objetivo geral o desenvolvimento de um programa computacional capaz de realizar a verificação de seções de concreto armado à flexão composta oblíqua, considerando a não linearidade das relações constitutivas dos materiais, para fins de análises tanto de ELU, através da determinação dos esforços resistentes internos, quanto de ELS, por meio do cômputo das rigidezes das seções. Para que isso seja realizado, alguns objetivos específicos devem ser levados em consideração, os quais são:

- Desenvolver a ferramenta *RCSectionCode*, generalizando-a para análise de seções transversais de concreto armado, de geometrias quaisquer, sob flexão composta oblíqua;
- Criação de uma biblioteca de modelos constitutivos uniaxiais para os materiais, de modo a permitir a fácil expansão em desenvolvimentos futuros;
- Criação de um pós-processador eficiente, incluindo comandos gráficos interativos, para visualização dos resultados, por meio de diagramas de momento-rigidez-curvatura e superfícies



de interação entre os esforços internos, bem como geração de relatórios automáticos em arquivos de saída de dados;

- Validar a ferramenta com base em resultados experimentais, teóricos e soluções numéricas encontradas a partir de *software* comercial.

## 2 – ANÁLISE DE SEÇÕES TRANSVERSAIS EM CONCRETO ARMADO

A análise linear de estruturas representa um conjunto de hipóteses traduzidas por relações lineares entre as diversas grandezas atuantes. Essas relações lineares podem ser observadas na teoria dos corpos sólidos contínuos deformáveis, em membros reticulados ou elementos de superfícies.

Assim, admite-se que as relações entre deformações-deslocamentos, contexto no qual o campo das deformações depende linearmente do campo dos deslocamentos, as relações constitutivas, onde as tensões têm relação de proporcionalidade com as deformações; e as equações de equilíbrio, que são equações lineares envolvendo o campo das tensões com as solicitações aplicadas devem ter garantidas a linearidade de todas essas equações.

A linearização dessas equações é uma tentativa de aproximação ao comportamento real das estruturas, o qual é de fato não linear. Em um aspecto geral, a aproximação linear faz sentido até um determinado nível de solicitação, a partir do qual é inevitável a consideração de análises mais fiéis à realidade, as quais deverão incorporar, no mínimo, os efeitos não lineares mais importantes para a análise. Segundo Karpenko *et al.* (2015), em estruturas de concreto armado, antes da fissuração o comportamento é de natureza majoritariamente linear; após a fissuração, o comportamento torna-se nitidamente não linear.

Existem muitos aspectos não lineares – físicos e geométricos - que podem ou não ser considerados em determinada análise. Além disso, existem muitas formas de modelar (idealizar) cada um desses aspectos, recorrendo a uma maior quantidade de simplificações ou não. Portanto, uma análise não linear é mais complexa que uma análise linear. Para Wu *et al.* (2017) a análise linear torna-se importante para situações que envolvem a implementação de novos materiais e quando a segurança estrutural é rigorosamente exigida. Por outro lado, a análise não linear é mais racional e deve ser utilizada para otimização dos elementos estruturais.

Usualmente, a divisão da não linearidade é feita em dois grupos: a não linearidade física (NLF) e a não linearidade geométrica (NLG). Como o foco do presente trabalho é a NLF, serão abordados temas relacionados somente a essa definição.

Para Lacerda (2014), a NLF caracteriza-se por ocasionar relações não lineares entre tensão – deformação relacionada com as propriedades intrínsecas do material e gera a não proporcionalidade entre causa e efeito.

O comportamento não linear físico do concreto armado em serviço pode ser modelado de duas maneiras: por meio das relações entre tensões e deformações do concreto e do aço, ou via diagramas momento-curvatura de uma seção transversal. A abordagem do presente trabalho

será baseada em ambas as relações, sendo assim, será dado um maior enfoque sobre esses temas em seções seguintes, mas inicia-se a análise pelas relações constitutivas dos materiais.

Os modelos constitutivos exigem, além da discretização dos elementos estruturais em trechos de armaduras constantes, a estratificação das seções em camadas (*layers*), ao longo dos quais serão realizadas as integrações numéricas das tensões normais. Neste trabalho, as seções serão discretizadas pelo método da Triangulação de Delaunay, que será descrito na seção 3. Já os modelos baseados em diagramas momento *versus* curvatura são chamados de modelos mecânicos e trazem o problema não linear para o âmbito macroscópico das seções, e não mais de pontos quaisquer da estrutura.

Deve-se ter em mente, ao final da apresentação dos possíveis tipos de análise estrutural que cada estrutura merece um estudo particular, ao qual se aplica a teoria mais conveniente para sua resolução. Buscas por análises mais realistas devem estar sempre presentes nos projetos estruturais, tomando-se sempre precauções quanto à segurança. Para isso, a NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda verificações de estados limites para cada análise, conforme apresentado na Tabela 1.

**Tabela 1:** Recomendações para análises segundo a NBR 6118

Análise	Verificação
Linear	ELU* e ELS
Linear com Redistribuição	ELU
Plástica	ELU
Não-Linear	ELU e ELS
Através de Modelos Físicos	ELU e ELS
*se garantida a ductilidade dos elementos estruturais	

**Fonte:** NBR 6118 (ABNT, 2014)

## 2.1– Modelos constitutivos uniaxiais do concreto e do aço.

Em um modelo para análise de estruturas de concreto armado, é necessária a adoção de modelos constitutivos que representam os materiais concreto e aço, e sua interação, de forma mais precisa possível. Por meio desses modelos constitutivos, busca-se representar matematicamente o comportamento físico e mecânico dos materiais nos elementos estruturais solicitado por diferentes combinações de carregamento (JUNGES, 2016).

Existem, na literatura especializada, vários modelos constitutivos desenvolvidos para elucidar o comportamento individual e conjunto dos materiais concreto e aço. Todavia, ainda não há um consenso sobre o assunto no meio técnico a respeito do modelo que melhor represente os materiais. Esse fato advém da complexidade na descrição das interações entre os

materiais e dos métodos adequados para a medição e calibração de variáveis, e, portanto, estão em constante surgimento novos modelos e pesquisas sobre o concreto armado.

Em comparação com o concreto, o aço é um material bem menos complexo, sendo que as suas propriedades não são normalmente influenciadas pelas condições climáticas nem variam ao longo do tempo. Dessa forma, os modelos constitutivos para o aço da armadura passiva também são mais simples do que os para concreto, de modo que o comportamento elastoplástico perfeito já fornece uma boa aproximação da resposta real desse material.

A escolha do tipo de modelo constitutivo a ser empregado no modelo de análise estrutural depende do tipo de estrutura a ser analisado, tipos de solicitações a quais estão submetidos e o objetivo da análise. Alguns outros fatores que influenciam na escolha dos modelos são as facilidades de implementação computacional e a de determinação das variáveis que alimentam as equações. Portanto, os modelos constitutivos inicialmente implementados no programa podem ser consultados na Tabela 2 e suas formulações com as legendas das variáveis no Anexo 1.

**Tabela 2:** Modelos constitutivos uniaxiais implementados no programa.

Id	Concreto		Aço
	Compressão	Tração	
1	NBR 6118 (ABNT,2014) e EUROCODE-02 (EN-1992-1-1)	$f_t = 0$	NBR 6118 (ABNT,2014)
2	Hognestad (1951)	NBR – 6118 (ABNT,2014)	Chiorean (2017)
3	Saenz (1964)	Carreira e Chu (1986)	Chai <i>et al.</i> (1990)
4	-	Vecchio e Collins (1986)	-

**Fonte:** Autor, 2021.

## 2.2– Solicitações normais em seções transversais

No caso de estruturas de eixo reto e com um plano longitudinal de simetria, quando a atuação do carregamento externo (forças distribuídas, concentradas e momentos aplicados em pontos específicos) está contida naquele plano e tem uma componente transversal ao eixo de referência, nota-se um comportamento específico, dito flexão.

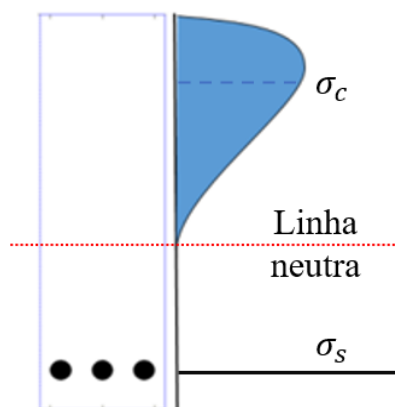
É comum e válida a associação entre o termo flexão e a mudança de curvatura do eixo, pois, sob a ação de carregamentos externos, as seções transversais giram em torno de um eixo contido no plano da seção e que passa pelo centro de gravidade.

De outro ponto de vista, avalia-se a atuação dos esforços (normal, cortante e momento fletor) provocados ao longo da barra e não o carregamento aplicado. Sob essa ótica, diz-se que

a flexão é uma resposta para a qual contribuem cada um daqueles esforços, sendo que para a presença de cada esforço a flexão recebe uma denominação diferente.

Para o prosseguimento das definições, algumas hipóteses simplificadoras são adotadas. A primeira diz respeito às seções de uma viga, que tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão (hipótese de Euler-Bernoulli). Essa conclusão é válida para vigas de qualquer material, seja elástico ou inelástico, linear ou não linear. As propriedades dos materiais devem ser simétricas em relação ao plano de flexão. As linhas longitudinais na parte inferior da viga são alongadas, enquanto aquelas na superior são diminuídas, para o caso de curvatura positiva. No estudo sobre curvaturas invertidas esse esquema não é válido.

Outro conceito importante diz respeito à linha neutra, a qual é compreendida como um plano que separa duas regiões – a comprimida da tracionada – num mesmo elemento submetido à flexão. A Figura 1 ilustra a distribuição de tensões ( $\sigma$ ), ao longo da altura ( $h$ ), de uma seção de concreto armado sem considerar a contribuição do concreto na tração.



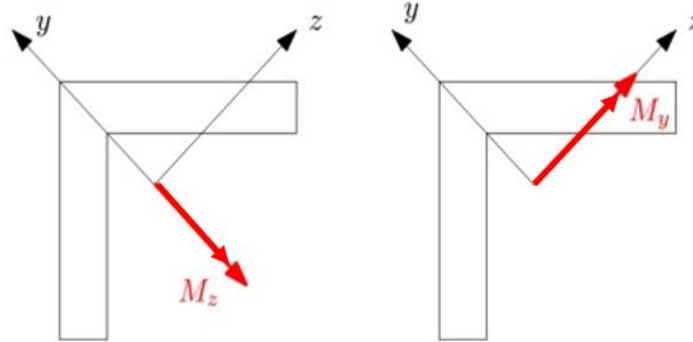
**Figura 1:** Representação da linha neutra e das tensões em uma seção de concreto armado.

(Autor, 2021) .

A seguir serão expostos de forma sucinta os tipos de flexão:

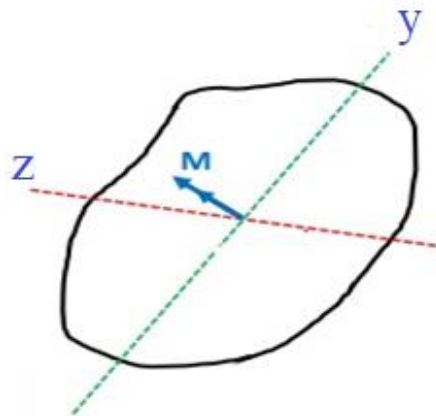
- Flexão pura: refere-se à flexão em peças submetidas a ação de um momento fletor constante e cisalhamento nulo;
- Flexão simples: flexão na presença de forças de cisalhamento, o que significa que o momento fletor varia ao longo do comprimento da peça;
- Flexão composta: quando o carregamento atua em um plano não perpendicular ao eixo da viga, devido a uma excentricidade do esforço normal ou ao posicionamento de momentos fletores específicos. Neste caso a carga poderá ser decomposta em duas componentes. Dentro da flexão composta há uma divisão entre reta e oblíqua.

A flexão composta reta ocorre quando o plano ou o eixo de solicitação ( $M_z$  ou  $M_y$ ) coincide com um dos eixos principais de inércia ( $y$  ou  $z$ ), como representado na Figura 2.



**Figura 2:** Representação da flexão composta reta (Autor, 2021).

Já na flexão composta oblíqua ocorre que o eixo de solicitação ( $M$ ) não coincide com nenhum dos eixos principais de inércia ( $y$  ou  $z$ ).

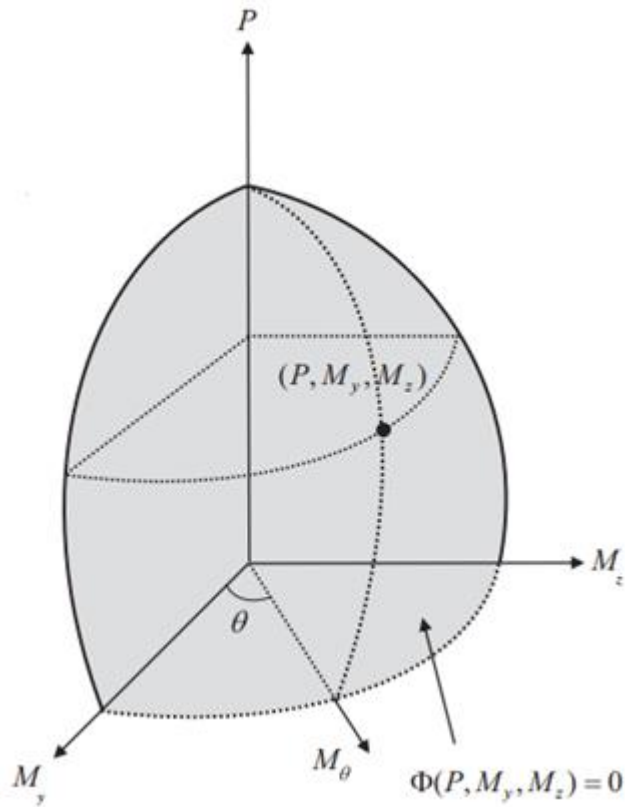


**Figura 3:** Representação da flexão composta oblíqua (Autor, 2021).

### 2.3 – Domínios de interação na flexão composta oblíqua.

O estudo de peças carregadas axialmente e sob momentos biaxiais é de importante interesse para casos em que a presença de momentos biaxiais reduz a capacidade de resistência e ductibilidade da seção transversal, usualmente avaliada apenas sobre carregamentos axiais (DI LUDOVICO *et al.*, 2010). Para que uma análise estrutural de flexão composta oblíqua seja realizada, é necessária a avaliação do diagrama de interação entre  $P - M_z - M_y$ , que reflete a interação entre os esforços solicitantes e os esforços resistentes. Portanto, um diagrama de interação define a relação entre carga e momento em um único plano da seção sob a ação de um carregamento  $P$  e momentos  $M_z$  e  $M_y$ . Para diversos níveis de carga axial, uma superfície de interação pode ser gerada, traçando-se radialmente a partir de  $P$ , as associações entre carga

e momentos, a Figura 4 mostra uma superfície de interação biaxial, na qual os eixos principais da seção transversal são denotados por  $y$  e  $z$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos fletores sob os eixos especificados nos subscritos, respectivamente. O ângulo  $\theta$  indica a relação entre os momentos fletores e o par de pontos  $\Phi(P, M_y, M_z) = 0$ , representa um ponto fora da superfície de interação, ou seja, a resistência da seção é 0 para esse par ordenado.



**Figura 4:** Superfície de interação para uma peça sujeita à flexão composta oblíqua (adaptado de Kim e Lee, 2017).

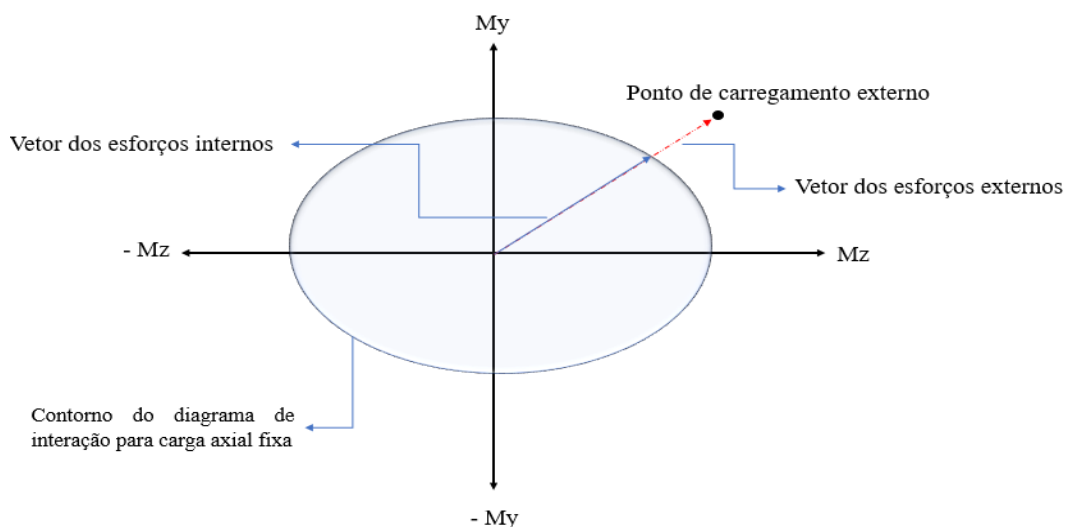
Para a construção dos diagramas de interação, e posteriormente, da superfície de interação, é necessário conhecer os limites de deformação dos materiais que compõem a seção, pois o estado limite último é atingido quando a deformação da fibra mais externa atinge seu valor limite. Nesse contexto o diagrama de tensão-deformação é importante, pois é possível associar as leis constitutivas uniaxiais dos materiais (concreto e aço), sejam elas lineares ou não, como uma propriedade da seção transversal. Para o desenvolvimento do trabalho, usou-se a hipótese de Euler-Bernoulli, sendo assim, admitiu-se que a curvatura é igual aos gradientes das deformações na seção transversal e às variações da rotação unitária ao longo do comprimento da peça.

Entretanto, a escolha de um método para o cálculo do diagrama de interação entre momento e carga axial não é tão simples. O procedimento manual é longo e exaustivo. Levando isso em consideração, existem vários métodos simplificados para a determinação desse diagrama, entre eles estão ACI 318 (2019), EUROCODE 2 (EN 1992-1-1) e NBR 6118 (2014). Para DI LUDOVICO *et al.* (2010), o uso de aproximações simplificadas é inseguro - em alguns casos - e não é capaz de fornecer nenhuma outra informação sobre as propriedades fundamentais da seção transversal, isto é, a fissuração e ponto de escoamento da armadura.

Vinciprova e Oliveto (2013) enumeram três linhas principais de pesquisas para uma compreensão mais profunda sobre o tema. Uma linha de pesquisa está associada aos programas experimentais que verificam a precisão dos modelos obtidos previamente; a segunda linha tem como objetivo a construção de novos modelos analíticos para a construção da superfície de ruptura, e a terceira linha de pesquisa, seguida no presente trabalho, tem lidado com o problema da determinação da superfície de ruptura usando algoritmos numéricos baseados na integração das equações de equilíbrio e das leis constitutivas dos materiais.

Uma característica importante da metodologia adotada neste trabalho é representada pela capacidade de determinar, diretamente, a relação entre os momentos resistentes e os momentos solicitantes, para um determinado nível de carregamento axial, para verificar se as condições de estado limite são atendidas.

Para tal verificação, os caminhos matemáticos podem ser de três maneiras. Uma consiste na análise da superfície de interação, para a qual é necessária uma análise em três coordenadas; outro conceito se refere à relação entre o esforço e o momento resultante, e o método adotado no presente estudo, que consiste em fixar um esforço normal – o esforço solicitante – e calcular a relação entre o vetor de solicitação e o vetor resistente, Figura 5 e equação (2.1).



**Figura 5:** Representação dos vetores de esforços. Autor, 2021.



O cálculo da capacidade resistente é dado pela seguinte equação:

$$F_s = \frac{\sqrt{M_{z,ext}^2 + M_{y,ext}^2}}{\sqrt{M_{z,int}^2 + M_{y,int}^2}} \quad (\text{Equação 2.1})$$

Onde,  $M_{z,int}$  e  $M_{y,int}$  representam os momentos resistentes nas direções  $z$  e  $y$ , respectivamente e  $M_{z,ext}$  e  $M_{y,ext}$  representam os momentos solicitantes nas direções  $z$  e  $y$ , respectivamente

Através dessa correlação entre esforços é possível avaliar a segurança da seção, uma vez que:

Se  $F_s > 1$ , os esforços externos excedem a capacidade resistente da seção;

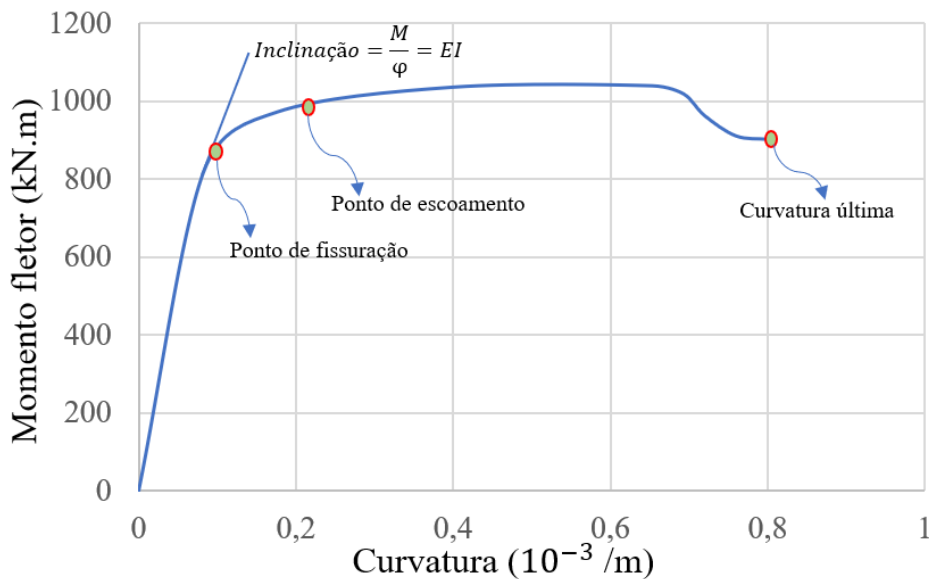
Se  $F_s < 1$ , os esforços internos comportam as solicitações externas;

Se  $F_s = 1$ , a seção está em equilíbrio.

## 2.4 – Relações do momento-curvatura

Compreender a resposta não linear e as características dos danos sofridos por estruturas de concreto armado são essenciais para atribuições de desempenho em estados limites último e de serviço, bem como em relação à segurança e economia. Em estruturas de concreto armado, observa-se que o comportamento estrutural pode ser modificado de acordo com as características dos membros que a compõem. Portanto, a relação momento-curvatura é uma das melhores soluções para avaliar e representar o comportamento de seções transversais de concreto armado (FOROUGH; YÜKSEL, 2020). Essa relação é importante por se relacionar com vários fenômenos relevantes, tais como: capacidades de resistência e rotação da seção e efeitos sobre estabilidade, que são diretamente afetados pela não linearidade física do concreto e do aço estrutural (SIMÃO *et al.*, 2016).

Uma curva típica de momento curvatura (Figura 6) é capaz de fornecer informações sobre o ponto de fissuração, ponto de escoamento da armadura, o momento máximo e último da seção, bem como as curvaturas correspondentes a esses pontos e, a partir de dados momentos e curvaturas, é possível determinar a rigidez à flexão, a rotação e a deflexão da seção transversal.



**Figura 6:** Respostas típicas de uma curva de momento-curvatura. Adaptado de Anwar e Najam (2016).

A rigidez da seção transversal ( $EI$ ) também pode ser obtida através de métodos distintos; o primeiro método consiste em fazer o simples produto entre o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o momento de inércia da seção transversal ( $I$ ), todavia, essa relação é válida somente para o comportamento linear-elástico da seção transversal, uma vez que uma estrutura de concreto armado depende da taxa de armadura, da extensão das fissuras e da deformação, sendo assim o primeiro método não é muito útil em outras aplicações.

Outra maneira indireta de determinar a rigidez da seção transversal é decorrente da tangente de cada ponto da relação de momento-curvatura. Então, uma curva particular de momento-curvatura obtida para um determinado nível de tensão axial e direção de flexão pode ser utilizada para determinar a rigidez à flexão em um  $i$ -ésimo ponto da relação, através da seguinte expressão:

$$EI^{(i)} = \frac{dM^{(i)}}{d\phi^{(i)}} \quad (\text{Equação 2.2})$$

É importante salientar que o valor da rigidez determinado pela tangente da curva de momento-curvatura é a rigidez à flexão efetiva da seção. Portanto, estão incluídos os efeitos de vários e importantes fenômenos, tais como: fissuração e as não linearidades dos materiais, a contribuição das taxas de armaduras e a mudança no módulo de elasticidade da seção transversal de concreto armado devido ao nível de deformação.

Como o foco de estudo deste trabalho está relacionado à flexão composta oblíqua, é importante relatar que estudos como os de Campione *et al.* (2016), apontam para uma redução

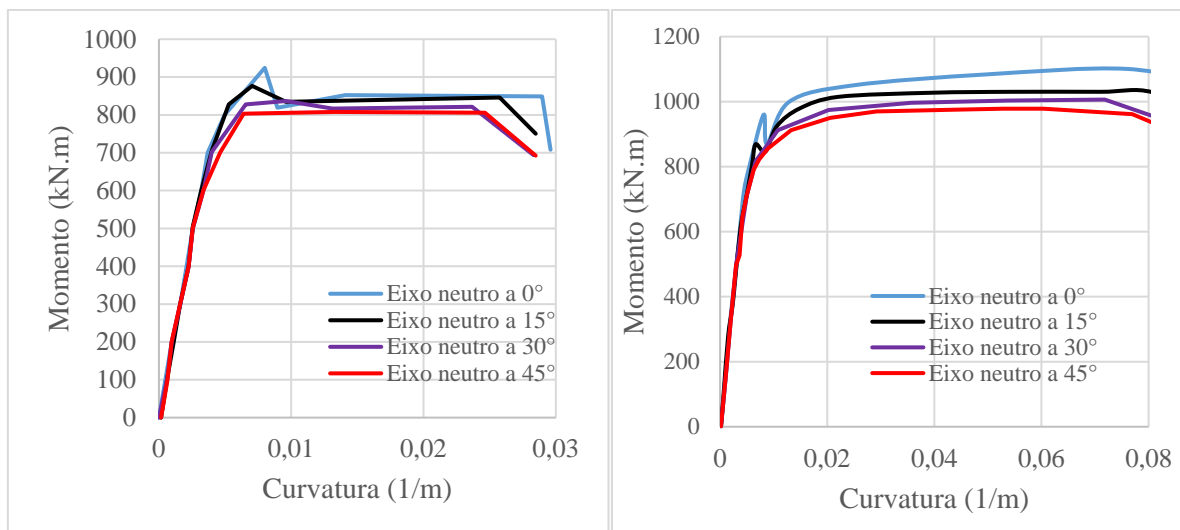
da ductilidade e curvatura de uma seção transversal de concreto armado submetido à flexão composta oblíqua. Essa relação sofre a influência de muitos fatores, destarte, uma análise paramétrica realizada por Breccolotti *et al.* (2019), aponta os principais parâmetros, os quais serão explicitados na seguinte sequência: o ângulo entre o eixo neutro e os eixos principais da seção, a taxa de reforço longitudinal e a força axial.

a) Influência da força axial

Para uma análise mais ampla do esforço normal, é usual empregar o conceito de força normal normalizada ( $\nu_d$ ). Infere-se que quanto maior a força axial mais inclinada será a parte decrescente da curva de momento-curvatura e menor será a rigidez. Dessa maneira, a Figura 7, ilustra essa conclusão com duas seções quadradas de 600 mm, de mesma taxa de armadura longitudinal (0,01), cobrimento de 40 mm, porém com forças axiais diferentes. A Figura 7 também ilustra a influência do ângulo de inclinação do eixo neutro,  $\alpha$ , na relação  $M$  vs  $\varphi$ .

b) Influência da taxa de armadura longitudinal ( $\rho_l$ )

Corroborando com o estudo de Breccolotti *et al.* (2019), Taheri *et al.* (2017) assinalam que a taxa de reforço longitudinal desempenha um papel positivo no aumento da curvatura (Figura 8), esse comportamento é explicado por três fatores principais: o aumento da resistência à flexão devido a maior presença de armadura longitudinal faz com que a perda de resistência à flexão resultante da fragmentação da cobertura de concreto seja menor que 15% da resistência à flexão da seção transversal; um número maior de barras bem distribuídas longitudinalmente produz uma área mais uniforme de distribuição de tensões; e uma grande quantidade de armadura na zona de compressão de seções de concreto armado retarda a deformação última de compressão no concreto.



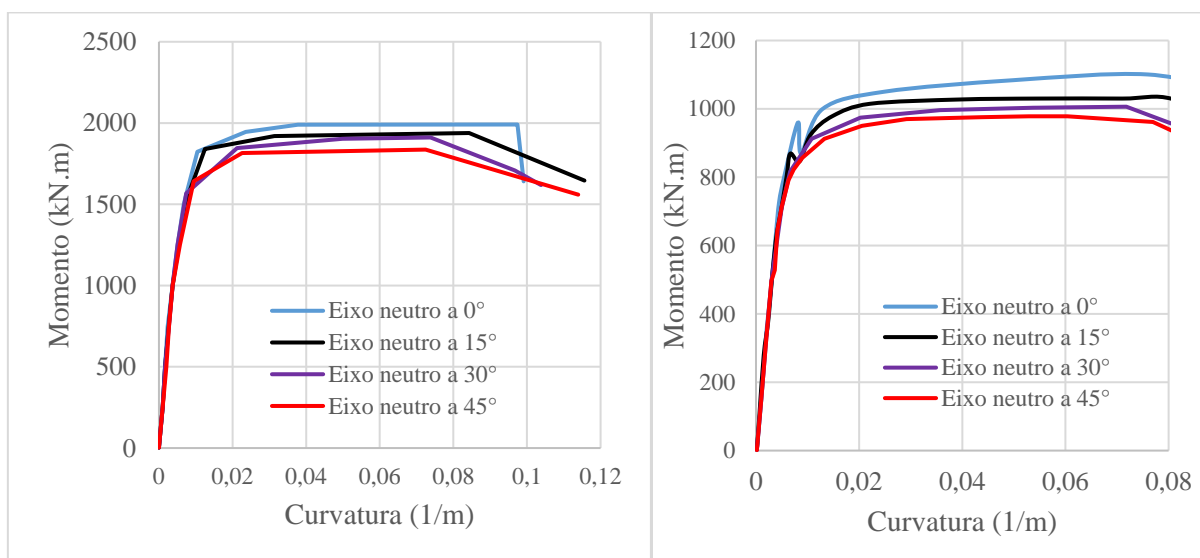
a)  $\nu_d = 0,65$  e  $\rho_l = 0,01$

b)  $\nu_d = 0,15$  e  $\rho_l = 0,01$

**Figura 7:** Relações de momento-curvatura sob influências da variação do esforço normal e do ângulo de inclinação do eixo neutro. Adaptado de Breccolotti *et al.* (2019).

c) Influência da inclinação do eixo neutro ( $\theta$ )

A influência da inclinação do eixo neutro é, geralmente, prejudicial, mas sua variabilidade é afetada por muitos fatores. Para baixos valores de esforço normal normalizado e taxas de armadura longitudinal, a curvatura decresce com o aumento da inclinação do eixo neutro, bem como o valor do momento máximo suportado pela seção. (Figuras 7 e 8).



a)  $\rho_l = 0,04$  e  $\nu_d = 0,65$

b)  $\rho_l = 0,01$  e  $\nu_d = 0,65$

**Figura 8:** Relações de momento-curvatura sob a influências da variação da taxa de armadura e do ângulo de inclinação do eixo neutro. Adaptado de Breccolotti *et al.* (2019).

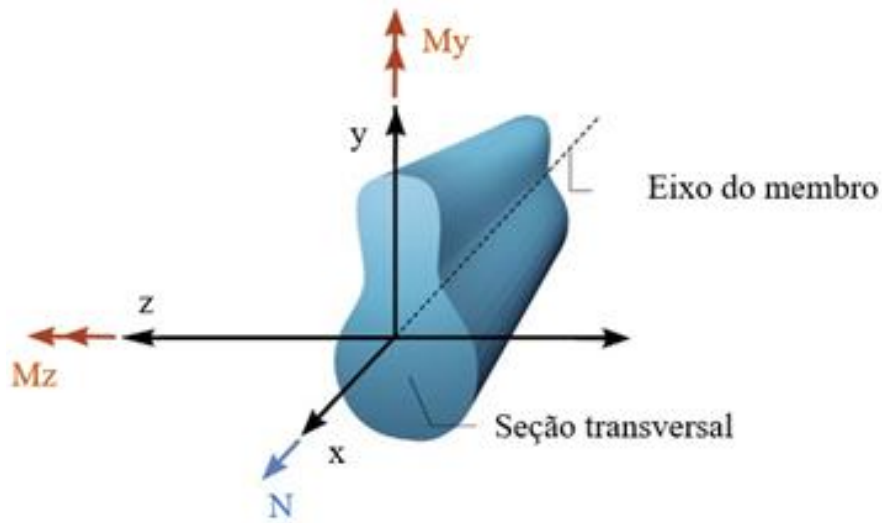
### 3- SISTEMATIZAÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE

No seguinte capítulo será demonstrado todo o desenvolvimento matemático que embasa a ferramenta *RCSectionCode*. Tendo início com as definições de deslocamentos e deformações generalizadas normais à seção, as quais definem as deformações axiais,  $\varepsilon_0$ , e as curvaturas sobre os eixos  $z$  e  $y$ , representadas por  $\varphi_z$  e  $\varphi_y$ , respectivamente. Passando pela determinação dos esforços internos totais resistentes da seção genérica, que contabiliza as resistências providas pelas áreas da seção de concreto e das barras de aço.

Com a definição dos procedimentos para calcular os esforços internos resistentes, a seção deve buscar o equilíbrio com as solicitações externas conhecidas, passando assim para a demonstração dos procedimentos que definem a matriz de rigidez da seção, os quais necessitam da aplicação do método de Newton-Raphson, (consultar Anexo 2), e da Triangulação de Delaunay para a discretização do domínio da seção e, posteriormente, da resolução do sistema não-linear de equações de equilíbrio em função de cada modelo constitutivo adotado (consultar Anexo 1).

#### 3.1– Campo de deslocamentos normais à seção.

Seja uma seção qualquer de concreto armado cujo eixo de referência longitudinal do membro coincide com o eixo  $x$ , conforme a Figura 9 abaixo. Considera-se que a seção está submetida a uma combinação de carregamentos que gere um momento fletor em torno do eixo  $z$  ( $M_z$ ), outro momento fletor em torno do eixo  $y$  ( $M_y$ ), e um esforço axial ( $N$ ) atuando no eixo de referência. Os esforços internos ilustrados na Figura 9 estão dispostos em seus sentidos positivos, por convenção. Os sentidos dos vetores momentos ( $M_z$  e  $M_y$ ) são obtidos por meio do produto vetorial (regra da mão direita). Quando a seção é submetida aos três esforços internos simultaneamente, deslocamentos normais (na direção  $x$ ) tendem a ocorrer em um ponto “ $P$ ” qualquer, determinado em função de  $y$  e  $z$ . Tal deslocamento pode ser entendido como a superposição dos efeitos que cada esforço interno produz isoladamente no ponto “ $P$ ”, conforme a equação (3.1).



**Figura 9:** Seção submetida à flexão composta oblíqua.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (\text{Equação 3.1})$$

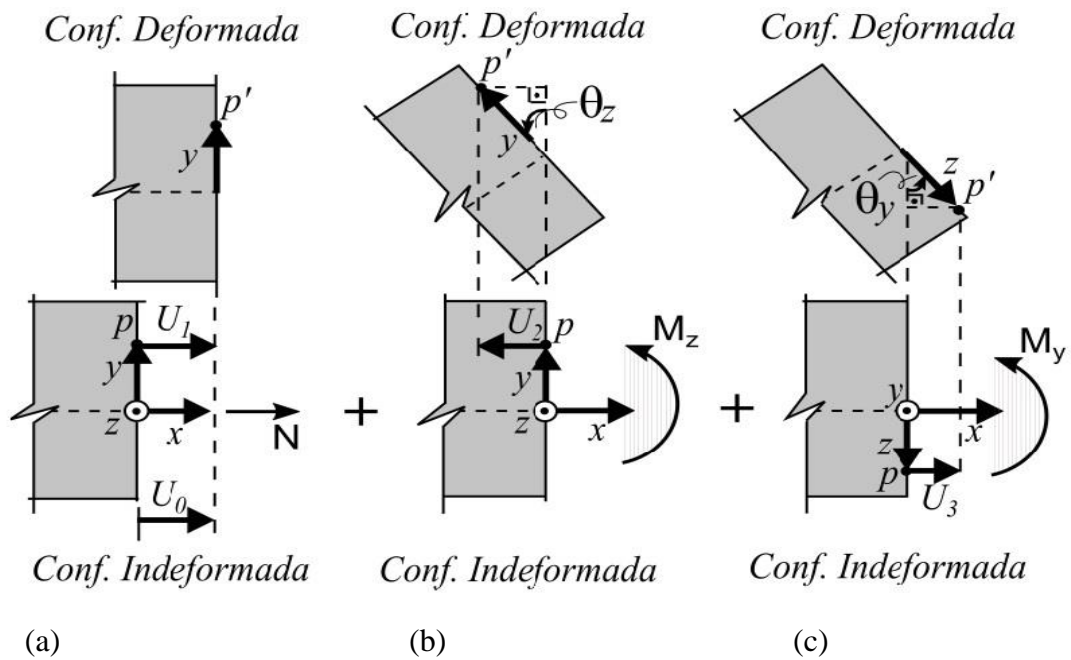
onde,

$U$  é o deslocamento no ponto “P” na direção normal à seção (direção  $x$ );

$U_1$  é o deslocamento no ponto “P” devido ao efeito isolado do esforço normal ( $N$ );

$U_2$  é o deslocamento no ponto “P” devido ao efeito isolado do momento ( $M_z$ );

$U_3$  é o deslocamento no ponto “P” devido ao efeito isolado do momento ( $M_y$ );



**Figura 10:** Deslocamentos normais à seção: (a) devido ao esforço normal  $N$ ; (b) devido ao momento fletor  $M_z$  e (c) devido ao momento fletor  $M_y$ .

É correto afirmar, de acordo com a Figura 10, que:

$$U_1 = U_0 \quad (\text{Equação 3.2.a})$$

$$U_2 = -y \cdot \text{sen}(\theta_z) \quad (\text{Equação 3.2.b})$$

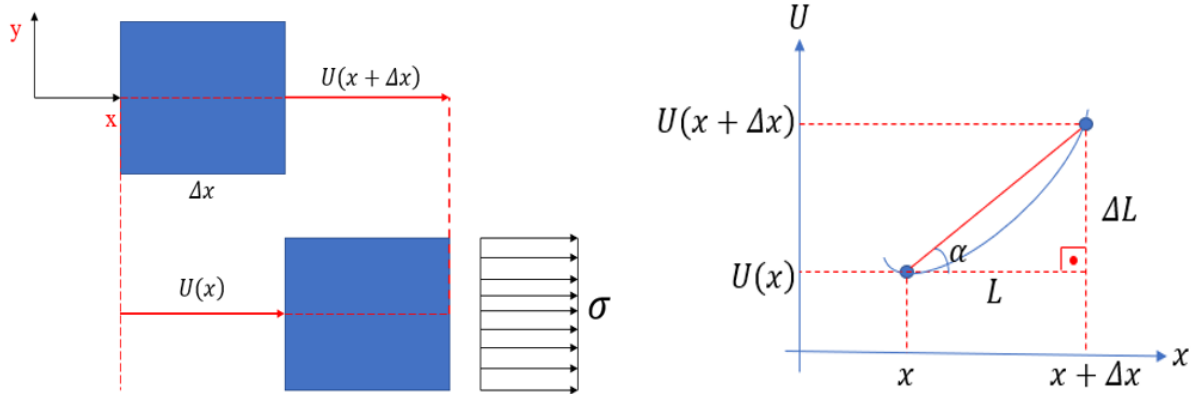
$$U_3 = z \cdot \text{sen}(\theta_y) \quad (\text{Equação 3.2.c})$$

onde  $\theta_y$  e  $\theta_z$  são, respectivamente, os ângulos de rotação da seção em torno dos eixos y e z, e o  $U_0$  é o deslocamento axial do eixo de referência. Assumindo a hipótese de pequenos deslocamentos para a linearização,  $\theta_z \approx \text{sen}(\theta_z)$  e  $\theta_y \approx \text{sen}(\theta_y)$ , e substituindo as equações (3.2) em (3.1), tem-se:

$$U = U_0 - y \cdot \theta_z + z \cdot \theta_y \quad (\text{Equação 3.3})$$

### 3.2– Campo de deformações normais à seção.

Seja um elemento de comprimento  $\Delta x$  submetido a uma tensão uniforme na direção horizontal, conforme ilustrado na Figura 11. A deformação normal é deduzida tomando-se o limite quando o comprimento  $\Delta x$  tende a 0, conforme equação (3.4). A partir do seguinte procedimento.



**Figura 11:** Elemento infinitesimal submetido a uma deformação normal.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{L} &= \frac{[U(x + \Delta x) + \Delta x - U(x)] - \Delta x}{\Delta x} \\ \frac{\Delta L}{L} &= \frac{[U(x + \Delta x) - U(x)]}{\Delta x} \\ \varepsilon &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[U(x + \Delta x) - U(x)]}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{dU}{dx} \quad (\text{Equação 3.4})$$

A equação (3.4) é uma relação entre deslocamentos e deformações e expressa uma condição de compatibilidade. Aplicando a relação supracitada no campo dos deslocamentos expressos pelas equações (3.3), verifica-se que:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{d}{dx}(U_0 - y \cdot \theta_z + z \cdot \theta_y) \\ \varepsilon &= \frac{dU_0}{dx} - y \cdot \frac{d\theta_z}{dx} + z \cdot \frac{d\theta_y}{dx} \end{aligned} \quad (\text{Equação 3.5})$$

Admitindo que  $dU_0 / dx = \varepsilon_0$  representa a deformação axial do eixo de referência,  $d\theta_z / dx = \varphi_z$  representa a curvatura da seção em torno de z e  $d\theta_y / dx = \varphi_y$  denota a curvatura da seção em torno de y, é possível expressar as deformações normais da seção ao determinar a equação (3.6):

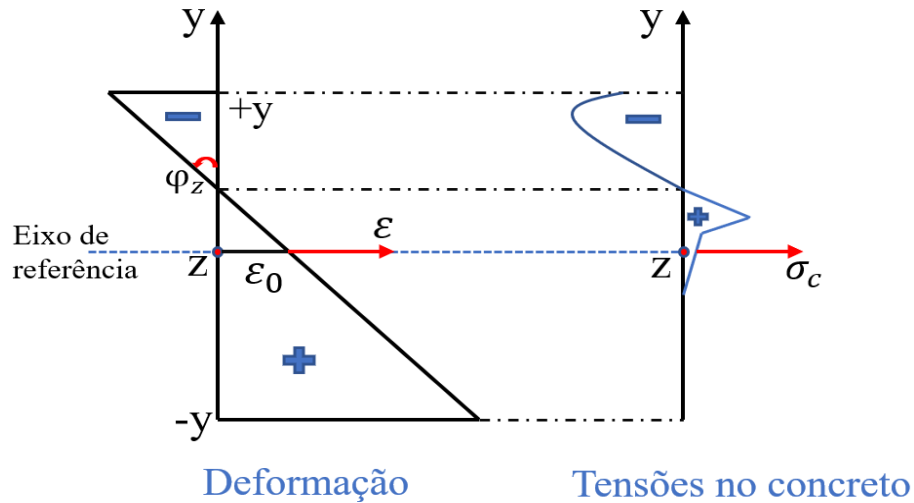
$$\varepsilon = \varepsilon_0 - y \cdot \varphi_z + z \cdot \varphi_y \quad (\text{Equação 3.6})$$

A equação (3.6) representa um plano de coordenadas cartesianas (z,y), pois o comportamento assumido na Figura 11 segue a hipótese de Euler-Bernoulli. As deformações  $\varepsilon_0$ ,  $\varphi_z$  e  $\varphi_y$  são denominadas de deformações generalizadas da seção.

### 3.3– Esforços internos resistentes do concreto.

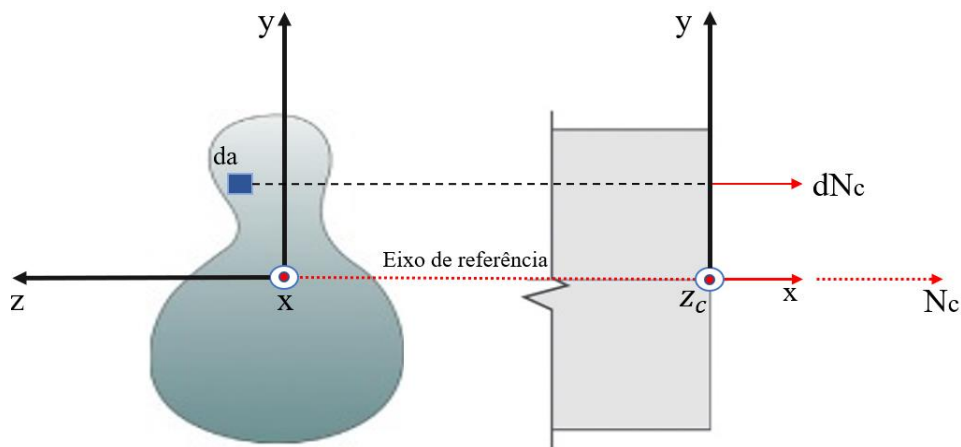
O concreto é um material que apresenta uma relação entre tensão-deformação não linear, com comportamento diferenciado para os esforços de tração e compressão. Na seção de concreto, a tensão  $\sigma_c$  também é função de y e z, pois  $\sigma_c = f(\varepsilon)$ . A Figura 12 mostra a distribuição de tensão na seção de concreto como função de y para um valor de z prefixado. Valores negativos indicam tensões de compressão e valores positivos representam tensões de tração.





**Figura 12:** Distribuição das tensões no concreto para um valor fixo de  $z$ .

O esforço normal à seção de concreto pode ser obtido considerando a integração dos esforços que atuam em uma área infinitesimal ( $dA$ ), conforme o ilustrado na Figura 13, onde  $dN_c$  representa a força normal infinitesimal, que atua em  $dA$ .



**Figura 13:** Esforço normal em uma área infinitesimal na seção de concreto.

A partir do esquema da Figura 13, pode-se deduzir a seguinte expressão:

$$N_c = \int_A dN_c \quad (\text{Equação 3.7})$$

Sabendo-se que  $dN_c = \sigma_c \cdot dA$ , a equação (3.7) torna-se em:

$$N_c = \int_A \sigma_c \cdot dA \quad (\text{Equação 3.8})$$

Para a determinação do momento fletor relativo ao eixo  $z$ , o princípio análogo ao da determinação do esforço normal é utilizado, entretanto, é necessária a determinação de um

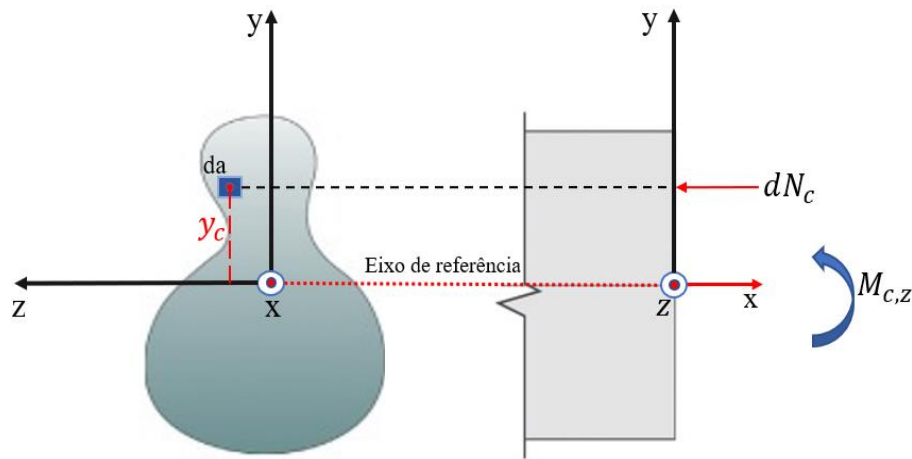
braço de alavanca na direção  $y$  para a determinação do momento em uma área infinitesimal. Considerando o esquema ilustrado na Figura 14, é possível determinar o momento fletor infinitesimal ( $dM_{c,z}$ ).

$$dM_{c,z} = -dN_c \cdot y_c \quad (\text{Equação 3.9})$$

Integrando na área e admitindo que  $dN_c = \sigma_c \cdot dA$ :

$$M_{c,z} = -\int_A y_c \cdot dN_c$$

$$M_{c,z} = -\int_A y_c \cdot \sigma_c \cdot dA \quad (\text{Equação 3.10})$$



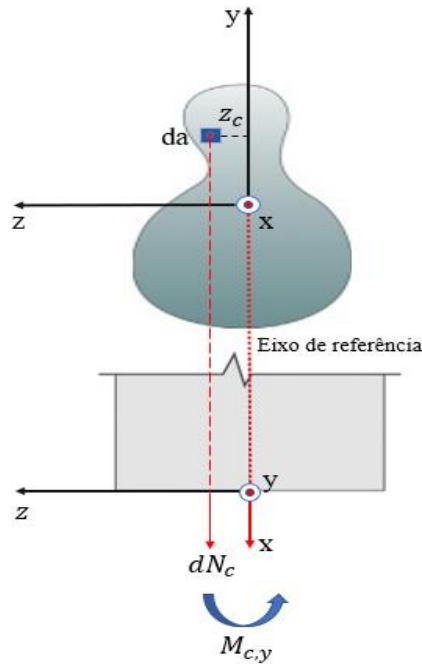
**Figura 14:** Momento fletor interno em torno do eixo  $z$ .

Para o cálculo do momento resistente em  $y$ , o procedimento é análogo ao do cálculo do momento em  $z$ , porém, deve ser considerado o sentido positivo do momento que segue a regra do produto vetorial. Da Figura 15, pode-se escrever:

$$dM_{c,y} = dN_c \cdot z_c$$

$$M_{c,y} = \int_A z_c \cdot dN_c$$

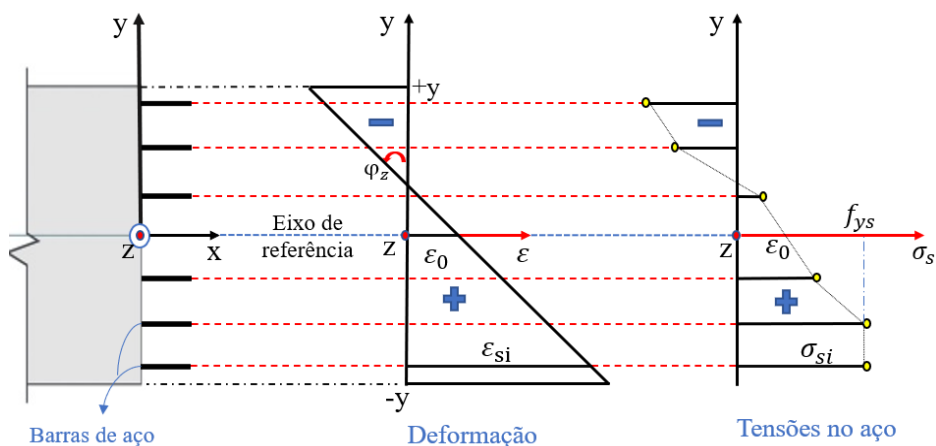
$$M_{c,y} = \int_A z_c \cdot \sigma_c \cdot dA \quad (\text{Equação 3.11})$$



**Figura 15:** Momento fletor interno em torno do eixo y.

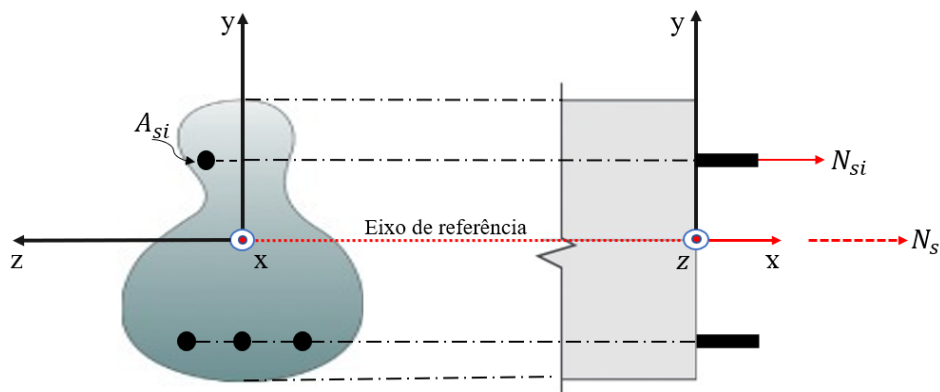
### 3.4– Esforços internos resistentes do aço.

O aço, assim como o concreto, também é considerado um material não linear devido ao comportamento elastoplástico, verificado pela existência de um segmento linear elástico e outro plástico, após as tensões solicitantes atingirem a tensão de escoamento do material. A Figura 16 mostra as distribuições de tensões no aço como função de y, para um valor prefixado de z.



**Figura 16:** Distribuição das tensões no aço para um valor fixo de z.

O esforço normal resistente devido à ação do aço pode ser obtido considerando o somatório dos esforços que atuam na  $i$ -ésima barra, com  $i = 1, 2, \dots, n_b$ , sendo  $n_b$  o número de barras da seção. Considera-se que  $A_{si}$  representa a área da seção da  $i$ -ésima barra.



**Figura 17:** Esforço normal resistente devido ao aço.

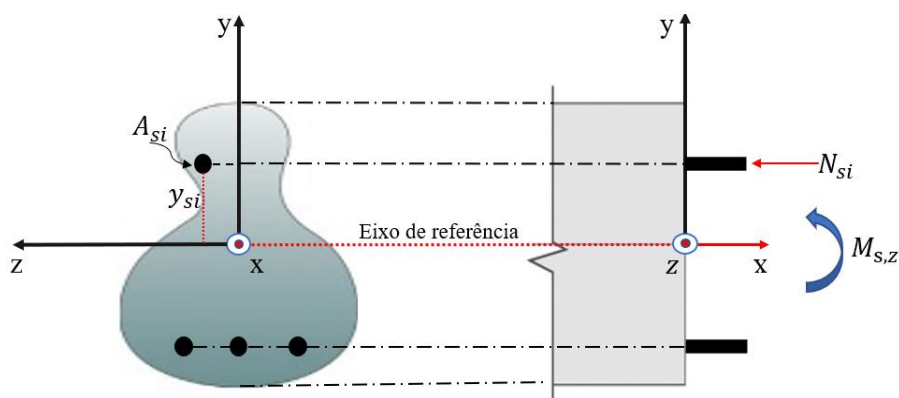
A partir do esquema da Figura 17, pode-se deduzir a seguinte expressão:

$$N_s = \sum_{i=1}^{n_b} N_{si} \quad (\text{Equação 3.12})$$

Sabendo-se que  $N_{si} = \sigma_{si} \cdot A_{si}$ , a equação (3.12) pode ser reescrita como:

$$N_s = \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.13})$$

Os momentos em torno do eixo  $z$  serão determinados considerando a área de cada barra “ $i$ ”, diferentemente da determinação dos momentos para o concreto, em que se utiliza uma definição de área infinitesimal.



**Figura 18:** Momento fletor interno, no aço, em torno de  $z$ .

Considerando o esquema ilustrado na Figura 18, pode-se determinar o momento gerado pela  $i$ -ésima barra ( $M_{s,z}^{(i)}$ ):

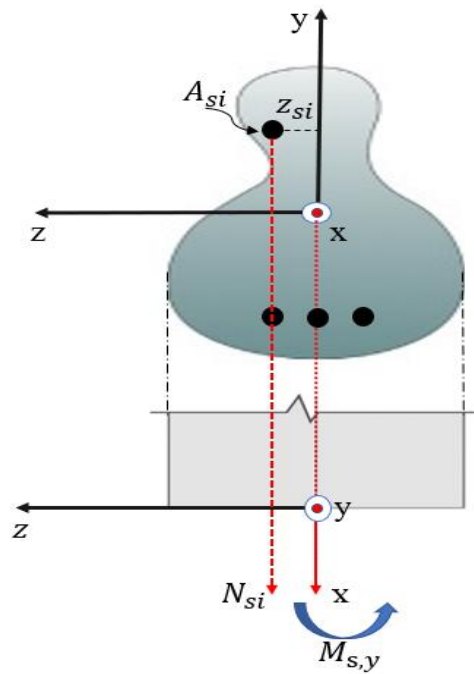
$$M_{s,z}^{(i)} = -N_{si} \cdot y_{si} \quad (\text{Equação 3.14})$$

Somando a contribuição de cada barra e fazendo considerações referentes ao sentido positivo do momento, pode-se determinar  $M_{s,z}$ , admitindo que  $N_{si} = \sigma_{si} \cdot A_{si}$ :

$$M_{s,z} = -\sum_{i=1}^{n_b} M_{s,z}^{(i)}$$

$$M_{s,z} = -\sum_{i=1}^{n_b} \sigma_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.15})$$

A determinação do momento em torno de y segue o procedimento similar ao de momento em torno de z. Tendo em vista as mesmas considerações referentes às áreas das barras de aço e a consideração da convenção para o sentido positivo.



**Figura 19:** Momento fletor interno, no aço, em torno de y.

Considerando o esquema da Figura 19, semelhantemente ao procedimento expresso na equação (3.14), tem-se:

$$M_{s,y} = \sum_{i=1}^{n_b} M_{s,y}^{(i)} \quad (\text{Equação 3.16})$$

Contabilizando a contribuição de cada barra, obtém-se:

$$M_{s,y} = \sum_{i=1}^{n_b} N_{si} \cdot z_{si}$$

$$M_{s,y} = \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_{si} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.17})$$

Portanto, ficam assim destacadas as equações (3.13), (3.15) e (3.17) para o cálculo dos esforços internos resistentes da seção de concreto armado.

### 3.5 – Esforços totais em uma seção genérica

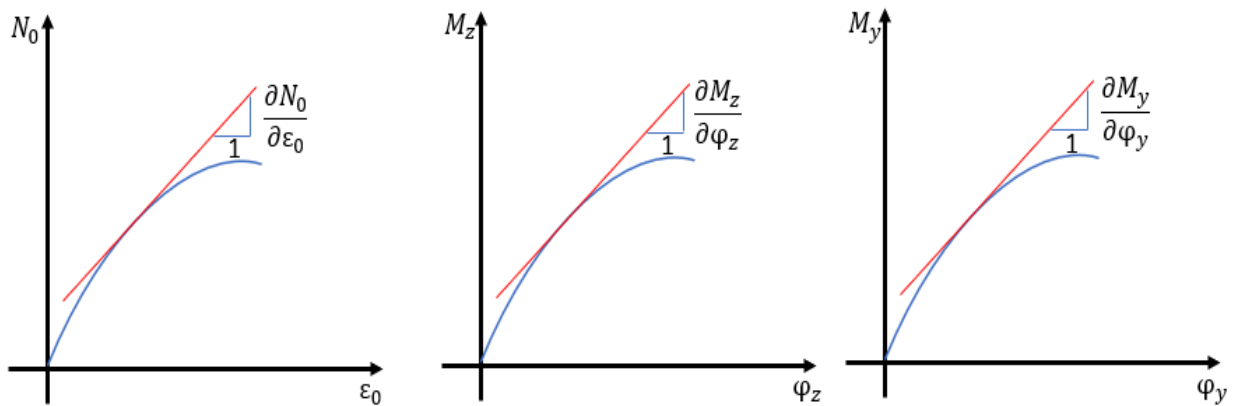
Os esforços totais na seção podem ser determinados somando as contribuições do concreto e do aço, admitindo aderência perfeita entre o aço e o concreto:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c + N_s \\ M_{c,z} + M_{s,z} \\ M_{c,y} + M_{s,y} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3.18})$$

Substituindo as equações (3.8), (3.10), (3.11), (3.13), (3.15) e (3.17) em (3.18), tem-se:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \sigma_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_{si} \cdot A_{si} \\ - \left( \int_A y_c \cdot \sigma_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \\ \int_A z_c \cdot \sigma_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_{si} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3.19})$$

As equações (3.19) são não lineares com relação a  $\varepsilon$ , uma vez que os modelos constitutivos para o aço e para o concreto são não lineares. A Figura 20 ilustra a não linearidade física dos esforços internos com relação a cada deformação generalizada.



**Figura 20:** Comportamento não linear com relação às deformações generalizadas.

### 3.6 – Sistema de equações não lineares: aplicação do método de Newton-Raphson.

Considerando que a seção deve encontrar o equilíbrio com relação a um conjunto de esforços externos conhecidos ( $N_{ext}$ ,  $M_{ext,z}$  e  $M_{ext,y}$ ), tem-se:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext,z} \\ M_{ext,y} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3.20})$$

Expandindo as funções de esforços internos em séries de Taylor em torno de um ponto  $\varepsilon$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} N(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ M_z(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ M_y(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\varepsilon) + \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot \Delta\varepsilon_0 + \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot \Delta\varphi_z + \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot \Delta\varphi_y \dots \\ M_z(\varepsilon) + \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot \Delta\varepsilon_0 + \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot \Delta\varphi_z + \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot \Delta\varphi_y \dots \\ M_y(\varepsilon) + \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot \Delta\varepsilon_0 + \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot \Delta\varphi_z + \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot \Delta\varphi_y \dots \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3.21})$$

Considerando que  $\Delta\varepsilon$  é pequeno comparado a  $\varepsilon$ :

$$\begin{bmatrix} N(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ M_z(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ M_y(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext,z} \\ M_{ext,y} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3.22})$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} N(\varepsilon) + \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot \Delta\varepsilon_0 + \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot \Delta\varphi_z + \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot \Delta\varphi_y \dots \\ M_z(\varepsilon) + \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot \Delta\varepsilon_0 + \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot \Delta\varphi_z + \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot \Delta\varphi_y \dots \\ M_y(\varepsilon) + \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot \Delta\varepsilon_0 + \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot \Delta\varphi_z + \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot \Delta\varphi_y \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext,z} \\ M_{ext,y} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3.23})$$

Reescrevendo o sistema da equação (3.23), obtém-se:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} & \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \\ \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} & \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \\ \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} & \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_s} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \varphi_z \\ \Delta \varphi_y \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext,z} \\ M_{ext,y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{ext}} - \underbrace{\begin{bmatrix} N(\varepsilon) \\ M_z(\varepsilon) \\ M_y(\varepsilon) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{int}} \quad (\text{Equação 3.24})$$

onde,

$\mathbf{K}_s$  é a matriz de rigidez tangente da seção (matriz jacobiana);

$\Delta \mathbf{e}$  é o vetor com os campos de deformações generalizados da seção;

$\mathbf{S}_{ext} = \begin{bmatrix} N_{ext} & M_{ext,z} & M_{ext,y} \end{bmatrix}^T$  é o vetor de forças externas generalizadas da seção;

$\mathbf{S}_{int} = \begin{bmatrix} N(\varepsilon) & M_z(\varepsilon) & M_y(\varepsilon) \end{bmatrix}^T$  é o vetor de forças internas da seção.

Uma vez que os esforços externos são conhecidos, a resolução do sistema consiste em encontrar o estado de deformação,  $\varepsilon = [\varepsilon_0 \quad \varphi_z \quad \varphi_y]^T$ , tal que as diferenças entre as forças externas e as forças internas sejam aproximadamente zeradas. Admitindo que  $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{S}_{ext} - \mathbf{S}_{int}$  é o vetor de forças residuais, a equação (3.25) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_s \cdot \Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{S}$$

$$\Delta \mathbf{e} = (\mathbf{K}_s)^{-1} \cdot \Delta \mathbf{S} \quad (\text{Equação 3.25})$$

onde  $(\mathbf{K}_s)^{-1}$  representa a matriz inversa de  $\mathbf{K}_s$ .

De forma iterativa, a equação (3.25) pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{e}_{i+1} - \mathbf{e}_i = (\mathbf{K}_{s,i})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{S}_i$$

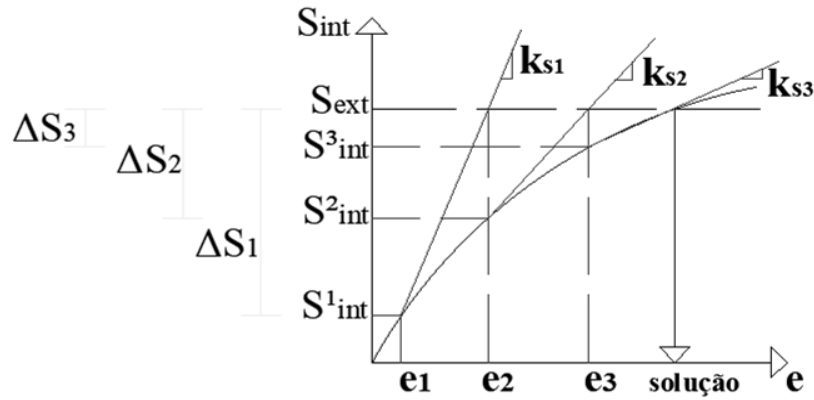
$$\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{e}_i + (\mathbf{K}_{s,i})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{S}_i \quad (\text{Equação 3.26})$$

O processo continua iterando até que o vetor resíduo possua módulo (norma) próximo de zero (ou de uma tolerância aceitável). Dessa forma, o módulo de  $\Delta \mathbf{S}_i$  é uma medida do erro absoluto da iteração  $i$ :

$$erro_i = \|\Delta \mathbf{S}_i\| = \sqrt{(\Delta \mathbf{S}_i)^T \cdot \Delta \mathbf{S}_i} \quad (\text{Equação 3.27})$$



A Figura 21 ilustra de forma esquemática o processo de Newton-Raphson para as funções vetoriais da equação (3.26).



**Figura 21:** Esquema de Newton-Raphson aplicado ao problema da flexão composta oblíqua.

### 3.7 – Determinação da matriz de rigidez tangente da seção e vetor de esforços internos corrigidos

Os nove elementos da matriz de rigidez podem ser determinados resolvendo-se as derivadas parciais dos esforços internos expressos na equação (3.19). Para tal, aplica-se a regra da cadeia:

$$K_s(1,1) = \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} = \int_A \frac{\partial \sigma_c(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot A_{si}$$

$$K_s(1,1) = \int_A \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.28})$$

$$K_s(1,2) = \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} = \int_A \frac{\partial \sigma_c(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot A_{si}$$

$$K_s(1,2) = \int_A \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_z} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_z} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.29})$$

$$K_s(1,3) = \frac{\partial N(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} = \int_A \frac{\partial \sigma_c(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot A_{si}$$

$$K_s(1,3) = \int_A \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_y} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_y} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.30})$$

$$K_s(2,1) = \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} = - \left( \int_A y_c \cdot \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot A + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right)$$

$$K_s(2,1) = - \left( \int_A y_c \cdot \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \quad (\text{Equação 3.31})$$

$$K_s(2,2) = \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} = - \left( \int_A y_c \cdot \frac{\partial \sigma_c(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right)$$

$$K_s(2,2) = - \left( \int_A y_c \cdot \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_z} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_z} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \quad (\text{Equação 3.32})$$

$$K_s(2,3) = \frac{\partial M_z(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} = - \left( \int_A y_c \cdot \frac{\partial \sigma_c(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right)$$

$$K_s(2,3) = - \left( \int_A y_c \cdot \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_y} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_y} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \quad (\text{Equação 3.33})$$

$$K_s(3,1) = \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} = \left( \int_A z_c \cdot \frac{\partial \sigma_c(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \right)$$

$$K_s(3,1) = \int_A z_c \cdot \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.34})$$

$$K_s(3,2) = \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} = \int_A z_c \cdot \frac{\partial \sigma_c(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}(\varepsilon)}{\partial \varphi_z} \cdot z_{si} \cdot A_{si}$$

$$K_s(3,2) = \int_A z_c \cdot \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_z} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_z} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.35})$$

$$K_s(3,3) = \frac{\partial M_y(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} = \int_A z_c \cdot \frac{\partial \sigma_c(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}(\varepsilon)}{\partial \varphi_y} \cdot z_{si} \cdot A_{si}$$

$$K_s(3,3) = \int_A z_c \cdot \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_y} \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_y} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.36})$$

Considerando-se que, ao resolver as derivadas parciais na equação (3.6), tem-se

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} = 1; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_z} = y; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_y} = z, \text{ e fazendo-se } \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} = E_c \text{ e } \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon} = E_s, \text{ as derivadas das equações}$$

(3.28) a (3.35) podem ser reescritas como:

$$K_s(1,1) = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_0} = \int_A E_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.37})$$

$$K_s(1,2) = \frac{\partial N}{\partial \varphi_z} = - \left( \int_A E_c \cdot y_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \quad (\text{Equação 3.38})$$

$$K_s(1,3) = \frac{\partial N}{\partial \varphi_y} = \int_A E_c \cdot z_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.39})$$

$$K_s(2,1) = \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_0} = - \left( \int_A E_c \cdot y_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \quad (\text{Equação 3.40})$$

$$K_s(2,2) = \frac{\partial M_z}{\partial \varphi_y} = \int_A E_c \cdot y_c^2 \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot y_{si}^2 \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.41})$$

$$K_s(2,3) = \frac{\partial M_z}{\partial \varphi_z} = - \left( \int_A E_c \cdot z_c \cdot y_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \quad (\text{Equação 3.42})$$

$$K_s(3,1) = \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_0} = \int_A E_c \cdot z_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.43})$$

$$K_s(3,2) = \frac{\partial M_y}{\partial \varphi_z} = - \left( \int_A E_c \cdot z_c \cdot y_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \quad (\text{Equação 3.44})$$

$$K_s(3,3) = \frac{\partial M_y}{\partial \varphi_y} = \int_A E_c \cdot z_c^2 \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si}^2 \cdot A_{si} \quad (\text{Equação 3.45})$$

Nas equações (3.37) a (3.45),  $E_s$  e  $E_c$  são funções de  $\varepsilon$  que representam a evolução do módulo de elasticidade tangente do aço e do concreto, respectivamente. Dessa forma, os efeitos não lineares de fissuração e esmagamento do concreto, bem como a plasticidade das armaduras, são devidamente modelados, assumindo a hipótese de aderência perfeita entre o concreto e o aço.

Separando-se as contribuições do aço e do concreto nas equações (3.37) a (3.45), a matriz de rigidez tangente da seção pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_{sc} + \mathbf{K}_{ss} \quad (\text{Equação 3.46})$$

onde,

$\mathbf{K}_{sc}$  é a matriz de rigidez tangente do concreto;

$\mathbf{K}_{ss}$  é a matriz de rigidez tangente do aço.

A partir das equações (3.37) a (3.46), conclui-se que:

$$\mathbf{K}_{sc} = \begin{pmatrix} \int_A E_c \cdot dA & -\int_A E_c \cdot y_c \cdot dA & \int_A E_c \cdot z_c \cdot dA \\ -\int_A E_c \cdot y_c \cdot dA & \int_A E_c \cdot y_c^2 \cdot dA & -\int_A E_c \cdot z_c \cdot y_c \cdot dA \\ \int_A E_c \cdot z_c \cdot dA & -\int_A E_c \cdot z_c \cdot y_c \cdot dA & \int_A E_c \cdot z_c^2 \cdot dA \end{pmatrix} \quad (\text{Equação 3.47})$$

$$\mathbf{K}_{ss} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot A_{si} & -\sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} & \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \\ -\sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} & \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot y_{si}^2 \cdot A_{si} & -\sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \\ \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si} \cdot A_{si} & -\sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} & \sum_{i=1}^{nb} E_{si} \cdot z_{si}^2 \cdot A_{si} \end{pmatrix} \quad (\text{Equação 3.48})$$

Conforme pode ser verificado a partir das equações (3.47) e (3.48), as matrizes  $\mathbf{K}_{sc}$ ,  $\mathbf{K}_{ss}$  e a matriz  $\mathbf{K}_s$  são simétricas e positivamente definidas, o que é uma característica das matrizes jacobianas.

As integrais expressas na matriz da equação (3.47) podem ser determinadas discretizando o domínio da seção em uma malha de fibras elementares de áreas  $\Delta A_i$ , com  $i=1, 2, \dots, n_a$ , onde  $n_a$  representa o número total de fibras. A descrição detalhada do método de discretização será apresentada na seção 3.8.

Dessa forma, a matriz  $\mathbf{K}_{sc}$  pode ser reescrita fazendo-se de soma de Riemann das áreas elementares:

$$\mathbf{K}_{sc} \cong \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot \Delta A_i & -\sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot y_{ci} \cdot \Delta A_i & \sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot z_{ci} \cdot \Delta A_i \\ -\sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot y_{ci} \cdot \Delta A_i & \sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot y_{ci}^2 \cdot \Delta A_i & -\sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot z_{ci} \cdot y_{ci} \cdot \Delta A_i \\ \sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot z_{ci} \cdot \Delta A_i & -\sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot z_{ci} \cdot y_{ci} \cdot \Delta A_i & \sum_{i=1}^{na} E_{ci} \cdot z_{ci}^2 \cdot \Delta A_i \end{pmatrix} \quad (\text{Equação 3.49})$$

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_s$ , dada pela soma das matrizes (3.48) e (3.49), considera a superposição da secção de concreto com as armaduras. No entanto, onde as armaduras estão dispostas, deve-se remover as áreas do concreto. Isso pode ser feito subtraindo-se de  $\mathbf{K}_{sc} + \mathbf{K}_{ss}$  uma matriz  $\mathbf{K}_{sr}$ , que representa o concreto removido. A matriz  $\mathbf{K}_{sr}$  pode ser facilmente determinada a partir de  $\mathbf{K}_{ss}$ , bastando substituir  $E_s$  por  $E_c$ . Portanto:

$$\mathbf{K}_{sr} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot A_{si} & -\sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot y_{si} \cdot A_{si} & \sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \\ -\sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot y_{si} \cdot A_{si} & \sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot y_{si}^2 \cdot A_{si} & -\sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot z_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \\ \sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot z_{si} \cdot A_{si} & -\sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot z_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} & \sum_{i=1}^{nb} E_{ci} \cdot z_{si}^2 \cdot A_{si} \end{pmatrix} \quad (\text{Equação 3.50})$$

Dessa forma, a matriz de rigidez tangente da secção, corrigida, pode ser determinada:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_{sc} + \mathbf{K}_{ss} - \mathbf{K}_{sr} \quad (\text{Equação 3.51})$$

De forma análoga ao procedimento aplicado para a correção da matriz de rigidez tangente da secção, descrito anteriormente, os esforços internos totais também devem ser corrigidos. Isso pode ser feito subtraindo de  $N$ ,  $M_z$  e  $M_y$ , os esforços nas áreas das barras substituindo  $\sigma_s$  por  $\sigma_c$ . Reorganizando a equação (3.19), tem-se:

$$\mathbf{S}_{int} = \begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \sigma_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot A_{si} \\ -\left( \int_A y_c \cdot \sigma_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot y_{si} \cdot \Delta A_{si} \right) \\ \int_A z_c \cdot \sigma_c \cdot dA + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot z_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3.52})$$

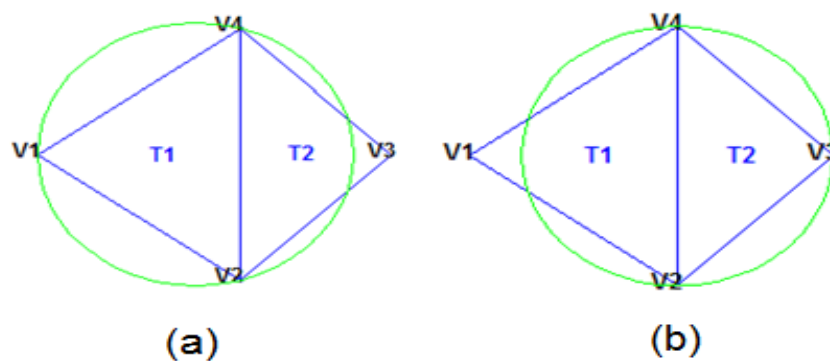
Os integrais da equação (3.52) podem ser determinados de forma aproximada pela discretização do domínio da secção, conforme descrito na secção 3.8:

$$\mathbf{S}_{int} = \begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{na} \sigma_{ci} \cdot \Delta A_{si} + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot A_{si} \\ -\left( \sum_{i=1}^{na} \sigma_{ci} \cdot y_{si} \cdot \Delta A_{si} + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot y_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot y_{si} \cdot A_{si} \right) \\ \sum_{i=1}^{na} \sigma_{ci} \cdot z_{si} \cdot \Delta A_{si} + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot z_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot z_{si} \cdot A_{si} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3.53})$$

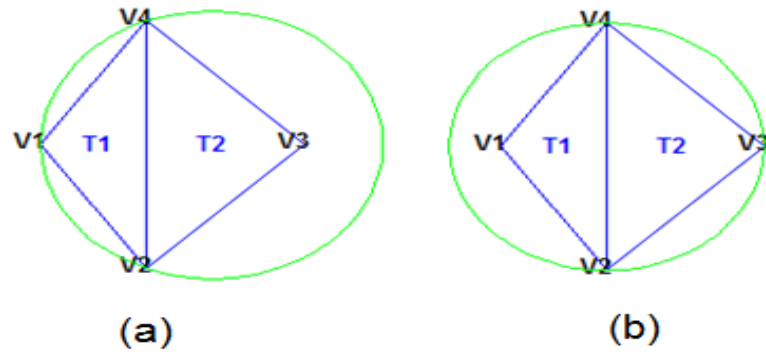
### 3.8 – Método para discretização da seção

Para determinação dos esforços internos e das rigidezes da seção, foi desenvolvida a ferramenta *RCSectionCode*, a qual consiste em um conjunto de rotinas escritas em MATLAB™ (MATHWORKS, 2011), para realização de análises não lineares de seções transversais em concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua. Para tal, utilizou-se como base as rotinas de pré-processamento desenvolvidas por TEIXEIRA (2017), que permitem o lançamento de uma seção em concreto armado de geometria qualquer, a qual pode também conter furos. A ferramenta *RCSectionCode* inclui as rotinas para análise da flexão composta oblíqua e as rotinas de pós-processamento, desenvolvidas para geração de relatórios das análises em formato *.txt* e apresentação de gráficos com os resultados na forma de Diagramas e Superfícies de Interação entre esforços internos, Relações Momento-Normal-Curvatura e Rigidez-Curvatura.

O código *RCSectionCode* faz a integração numérica da seção baseada em um modelo de discretização por fibras triangulares, utilizando o Método de Triangulação de Delaunay (DELAUNAY, 1934; DE BERG *et al.*, 2008). No que se refere ao caso 2D, esse método consiste em subdividir o domínio de integração em um conjunto de triângulos elementares, cujos vértices devem respeitar o conhecido "*Critério da Circunferência Vazia*" (DE BERG *et al.*, 2008). Esse critério garante que a circunferência associada a cada triângulo gerado não contém nenhum vértice em seu interior. Tal propriedade da triangulação é ilustrada na Figura 22, na qual se verifica que as circunferências associadas aos vértices dos triângulos T1 (Figura 22a) e T2 (Figura 22b) não contêm nenhum vértice em seus interiores, diferentemente dos casos mostrados na Figura 23, onde as circunferências geradas não estão vazias e contêm os vértices V3 e V1 em seus interiores. Portanto, a triangulação mostrada na Figura 23 não corresponde a uma Triangulação de Delaunay.

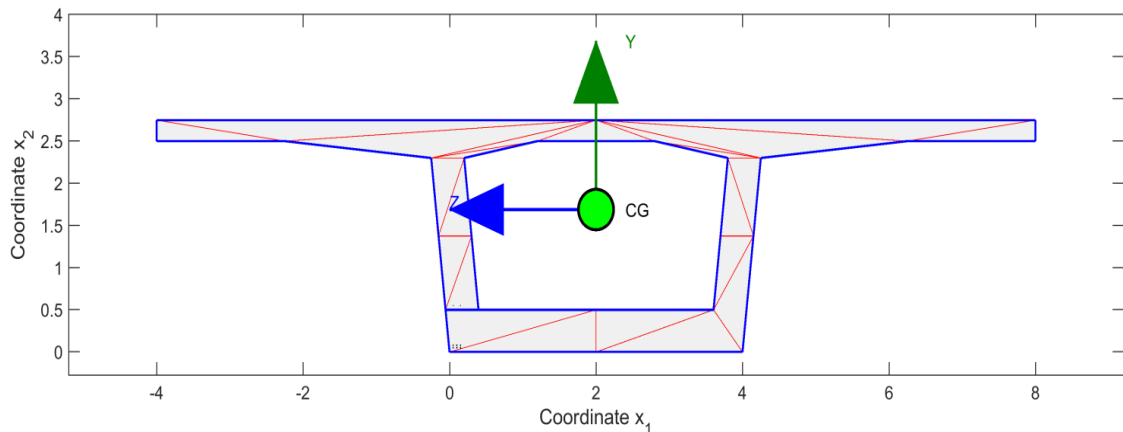


**Figura 22:** Critério da Circunferência Vazia aplicado aos Triângulos (a) T1 e (b) T2. Adaptado de MATHWORKS (2011).

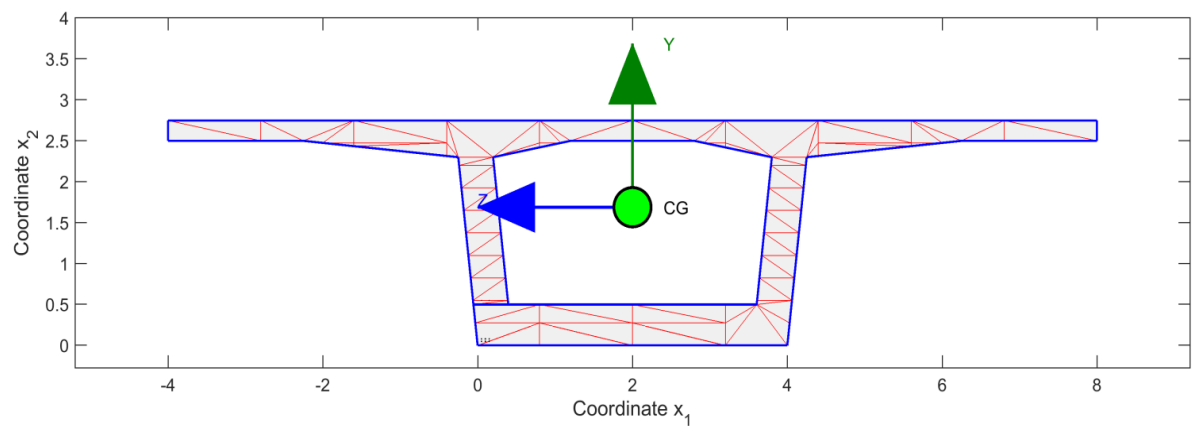


**Figura 23:** Casos que violam uma Triangulação de Delaunay: (a) Triângulo T2; (b) Triângulo T2. Adaptado de MATHWORKS (2011).

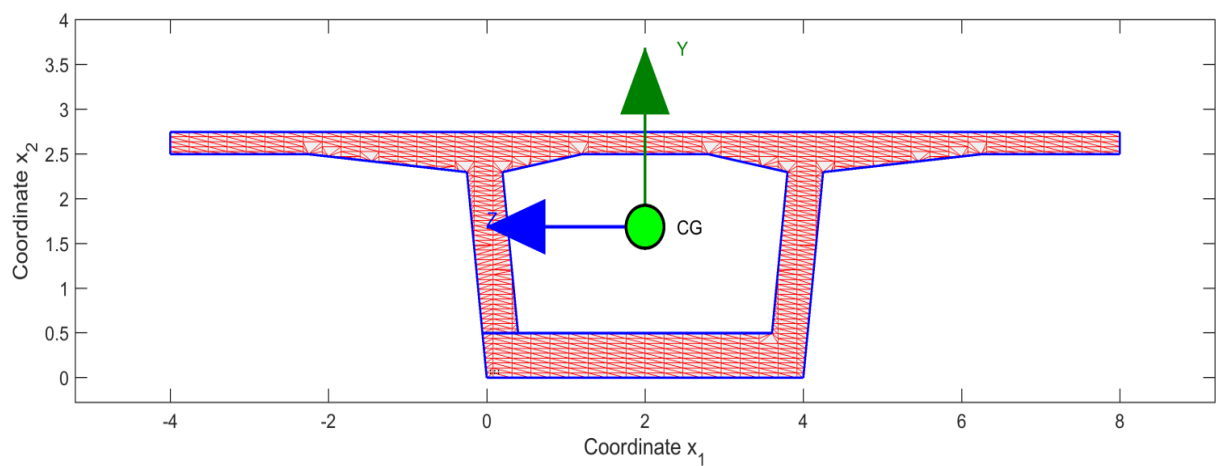
A triangulação da seção determina a área e as coordenadas do centro da circunferência inscrita (*incentro*) em cada triângulo elementar relativamente ao sistema local de coordenadas ( $zy$ ) com origem no centroide da seção bruta de concreto. Com essas informações, é possível determinar, em seguida, as deformações, tensões e módulo de elasticidade tangente, associados a cada área elementar, tendo como base a Hipótese de Euler-Bernoulli e o modelo constitutivo atribuído ao concreto. A contribuição de uma dada fibra triangular é computada durante a integração numérica para determinação do vetor de esforços internos e da matriz de rigidez tangente da seção, conforme já apresentado nas seções anteriores. O usuário pode definir o grau de discretização da seção, bastando para isso, fornecer o número de divisões na direção horizontal ( $n_H$ ) e na direção vertical ( $n_V$ ). O algoritmo se encarrega de encontrar automaticamente os triângulos a partir dessas definições. A Figura 24 mostra, como exemplo, diferentes graus de discretização por triangulação de uma seção celular típica de pontes rodoviárias geradas a partir do programa.



(a) Discretização com  $n_H \times n_V = 2 \times 2$  (24 fibras triangulares)



(b) Discretização com  $n_H \times n_V = 10 \times 10$  (92 fibras triangulares)



(c) Discretização com  $n_H \times n_V = 50 \times 50$  (1370 fibras triangulares)

**Figura 24:** Diferentes níveis de discretização gerados a partir do código *RCSectionCode* para uma seção celular típica de pontes



#### 4 – DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO $N - M_z - M_y$ E RELAÇÃO $M - \varphi - N - \alpha$

Em seções submetidas à flexão composta oblíqua, a principal ferramenta de análise é o diagrama de interação entre os esforços solicitantes, normal ( $N$ ) e o momento fletor resultante ( $M$ ), assim, a tensão normal na seção transversal é composta por esses esforços. Contudo, tem-se um problema iterativo, pois tanto a tensão normal quanto os esforços solicitantes dependem da profundidade e rotação da linha neutra com relação ao sistema de referência  $zy$  posicionado no centroide da seção bruta de concreto.

Portanto, o diagrama de interação  $N-M$  é utilizado para resolver esse impasse a partir dos pares  $N$  e  $M$  correspondentes a cada ângulo de rotação da linha neutra, esse diagrama gera uma envoltória, a qual determina a capacidade resistente da seção. Essa envoltória pode ser representada também por uma superfície, caso o momento resultante  $M_r$  seja transformado em suas respectivas componentes  $M_z$  e  $M_y$ .

Na construção do diagrama de interação, são necessários alguns parâmetros, entre eles, o ângulo de inclinação da linha neutra ( $\alpha$ ) e um parâmetro que caracterize todos os domínios de deformação. Para este último, é utilizado o parâmetro adimensional  $D$ , proposto por Werner (1974). As subseções a seguir descrevem este processo.

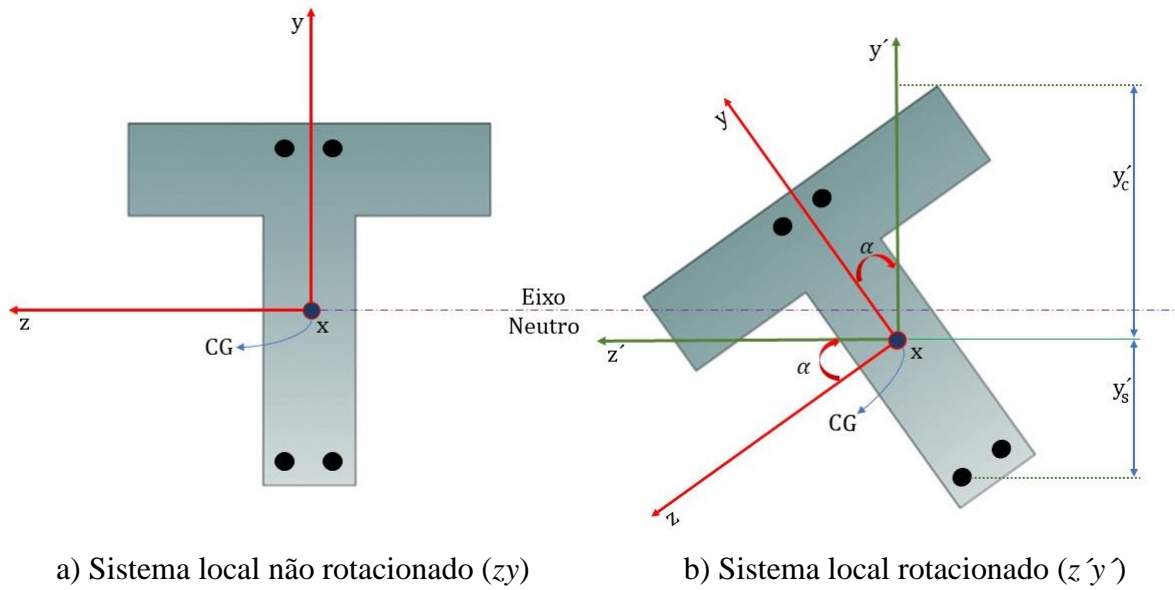
##### 4.1 – Inclinação da linha neutra

No processo de desenvolvimento do programa *RCSectionCode*, para a construção do diagrama de interação de uma seção transversal, o problema foi desenvolvido da maneira mais geral, ou seja, a seção transversal não possui eixos de simetria. Sendo assim, para definir a geometria de uma seção transversal e dos esforços externos atuantes, força normal e momento fletor, é necessário um plano cartesiano ortogonal ( $zy$ ), localizado no centro de gravidade da seção. Então, para uma dada posição da linha neutra, um novo sistema de referências ( $z'y'$ ), chamado de sistema de coordenadas rotacionadas, é definido, de tal forma, que o eixo  $-z'$  é paralelo a linha neutra do sistema não rotacionado ( $zy$ ), e  $\alpha$  é a rotação em sentido anti-horário do eixo  $z'$  em relação ao eixo  $z$ . Os eixos de referência rotacionados ( $z'y'$ ), também estão posicionados no centro de gravidade da seção. A Figura 25 ilustra a descrição deste parágrafo.

No sistema local rotacionado,  $z'y'$ , estão também definidas as fibras extremas da seção, fibra superior com máxima ordenada  $y'_c$  e fibra inferior com mínima ordenada  $y'_s$ , necessárias para a determinação das deformações que varrem os domínios de deformações. Pode-se facilmente deduzir a equação (4.1), a qual possibilita a transformação de coordenadas do sistema  $zy$  para o sistema  $z'y'$ .

$$\begin{bmatrix} z' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 4.1})$$

Com o desenvolvimento apresentado na seção 3.2, a deformação generalizada de uma seção transversal pode ser dada pela expressão matemática da equação (3.6). Neste ponto, as tensões e deformações axiais estão relacionadas via as relações constitutivas não lineares dos materiais que compõem a seção,  $\sigma = f(\varepsilon)$ , onde um valor de tensão corresponde a um valor de deformação, no entanto, mais de um valor de deformação pode corresponder a uma dada tensão.



**Figura 25:** Representação da rotação dos eixos locais.

Com a transformação das coordenadas (zy), para o sistema cartesiano rotacionado (z'y'), os esforços internos resistentes da seção são calculados em termos das componentes do sistema (z'y'), e são dados pela equação (4.2), a qual é obtida através de uma simples substituição na equação (3.53), passando  $z_{si}$  e  $y_{si}$ , que representam as coordenadas das fibras triangulares no sistema não rotacionado, para  $z'_{si}$  e  $y'_{si}$ , que passam a representar as coordenadas das fibras triangulares no sistema rotacionado.

$$\mathbf{S}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} N \\ M_{z'} \\ M_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{na} \sigma_{ci} \cdot \Delta A_{si} + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot A_{si} \\ - \left( \sum_{i=1}^{na} \sigma_{ci} \cdot y'_{si} \cdot \Delta A_{si} + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot y'_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot y'_{si} \cdot A_{si} \right) \\ \sum_{i=1}^{na} \sigma_{ci} \cdot z'_{si} \cdot \Delta A_{si} + \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{si} \cdot z'_{si} \cdot A_{si} - \sum_{i=1}^{nb} \sigma_{ci} \cdot z'_{si} \cdot A_{si} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 4.2})$$

Tais equações foram previamente desenvolvidas na seção 3.7, e representam o equilíbrio entre as tensões internas e os carregamentos resultantes aplicados externamente.

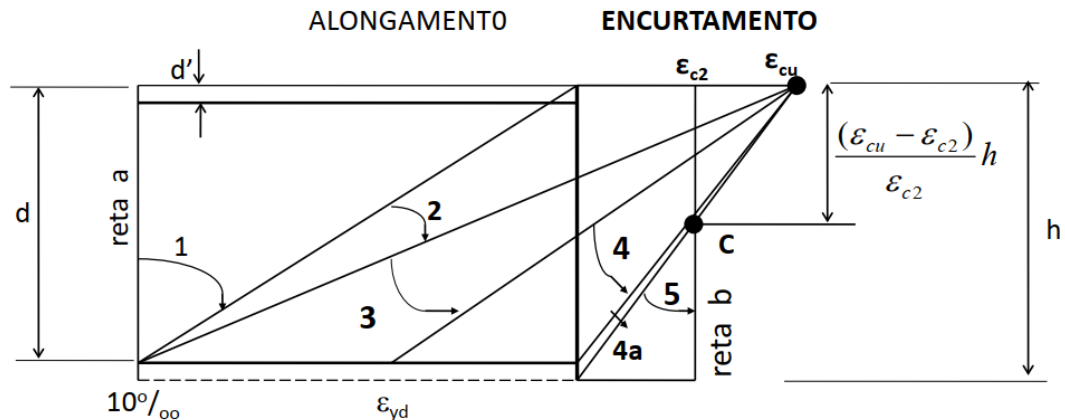
No entanto, para que os esforços internos sejam dados em termos do sistema cartesiano não rotacionado  $zy$ , uma nova transformação de coordenadas é necessária para converter tais esforços, o que representa a transformação inversa daquela expressa na equação (4.1). Tal procedimento pode ser feito conforme a seguinte equação:

$$\mathbf{S}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_{z'} \\ M_{y'} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 4.3})$$

Em resumo, o programa *RCSectionCode* trabalha com três sistemas de coordenadas, estes são: o sistema de referência global ( $xy$ ) para lançamento da seção transversal, o qual o usuário define as coordenadas da seção transversal a ser analisada; o sistema local de coordenadas transladadas para o centro de gravidade ( $zy$ ) – que é usado para a aplicação da Triangulação de Delaunay- e o sistema local de coordenadas rotacionadas ( $z'y'$ ) – importante para o cálculo dos esforços internos no sistema rotacionado. O usuário define a geometria da seção somente no sistema de referência ( $xy$ ), os outros dois sistemas são utilizados automaticamente nas rotinas durante as etapas de cálculo.

#### 4.2 – Domínios do estado limite último (ELU)

Os domínios de deformação para o ELU estão baseados nas prescrições da NBR 6118 (ABNT, 2014), conforme mostra a Figura 26. Com o plano de deformação passando por pelo menos um dos pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , que caracterizam os limites de deformação, é possível determinar a ruína da seção. Os valores para  $\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_{cu}$  e  $\varepsilon_{yd}$ , são, respectivamente 2‰, 3.5‰ e  $f_{yd}/E_s$ , onde  $f_{yd}$  é a tensão de escoamento do aço e  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço,  $h$  é a altura da seção transversal e  $d$  representa a altura útil.



**Figura 26:** Domínios de deformação da NBR 6118 (ABNT, 2014).

Segundo Werner (1974), as deformações extremas de um estado limite último podem ser parametrizadas para uma variável admissional ( $D$ ) que é expressa na Tabela 3, onde  $\epsilon_c$  é a deformação na fibra mais extrema comprimida e  $\epsilon_s$  é a deformação na fibra extrema tracionada, e conforme a notação da Figura 25. A definição desse parâmetro adimensional é muito útil para o desenvolvimento computacional do programa, já que o mesmo facilita a implementação. Essas deformações extremas são usadas para determinar a deformação axial e a curvatura no sistema local rotacionado, conforme descrito na seção a seguir. Portanto, o plano deformado da seção pode ser descrito com dois parâmetros, o ângulo de inclinação da linha neutra, descrito na seção 4.1, que é suficiente para definir o sistema de coordenadas rotacionadas, e o parâmetro  $D$ , que caracteriza a deformada no ELU.

**Tabela 3:** Representação do parâmetro  $D$  para os domínios de deformação

ESTADO	DOMÍNIO	$D$	$\epsilon_c(D)(\text{‰})$	$\epsilon_s(D)(\text{‰})$
alongamento uniforme	reta a	$D = 0$	10	10
flexo - tração	1	$0 < D < 2$	$10 - 5D$	10
flexão simples / composta	2	$2 \leq D < 7$	$1.4 - 0.7D$	10
flexão simples / composta	3 e 4	$7 \leq D < 12$	-3.5	$24 - 2D$
flexo - compressão	4a e 5	$12 \leq D < 13$	$1.5D - 21.5$	$24 - 2D$
encurtamento uniforme	reta b	$D = 13$	-2	-2

**Fonte:** Adaptado e traduzido de WERNER, 1974.

#### 4.3 – Método de Marín

Para o cálculo da superfície de interação é utilizado o Método de Marín (1979), o mesmo prescrito pelo ACI 318 (2019). A aplicação desse método torna-se vantajosa, pois ao invés de começar o cálculo da superfície de interação por um conjunto de tensões resultantes e, então,

tentar encontrar um ponto de falha na superfície seguindo um processo de aumento de carregamentos a cada passo, o método inicia de uma dada posição conhecida da linha neutra. Reitera-se que as hipóteses de Euler-Bernoulli são adotadas para a sistematização do método, sendo possível representar a deformação de uma fibra qualquer com relação ao sistema rotacionado pela seguinte expressão:

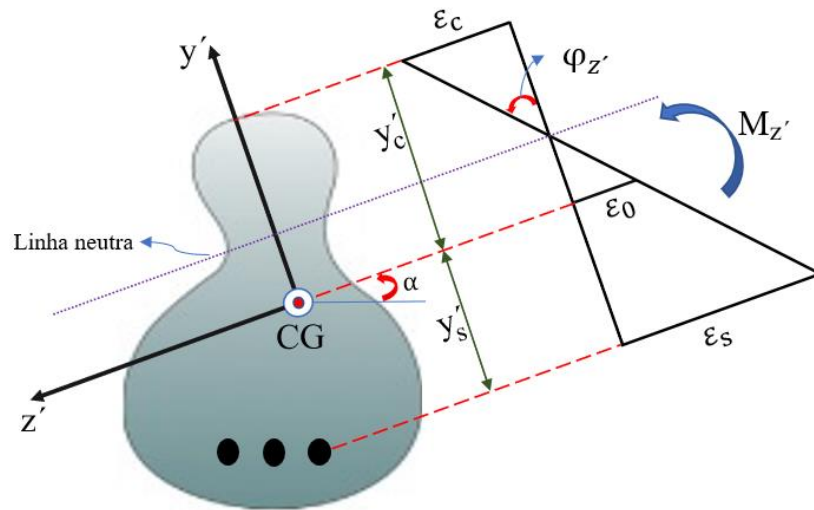
$$\varepsilon = \varepsilon_0 - [\varphi_{z'} \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 4.4})$$

onde  $\varepsilon_0$  é a deformação axial definida no centroide, e  $\varphi_{z'}$  é a curvatura em torno do eixo  $z'$ . Neste caso, uma vez que o vetor momento é tomado paralelo à linha neutra, a curvatura em torno do eixo  $y'$  ( $\varphi_{y'}$ ) é nula. As tensões normais estão relacionadas às deformações normais expressas na equação (4.2) através dos modelos constitutivos adotados, assumindo a não linearidade do material. Assim, os esforços internos no sistema local rotacionado ( $N$ ,  $M_{z'}$  e  $M_{y'}$ ) podem ser determinados usando a equação (4.2) com base nas deformações da equação (4.4).

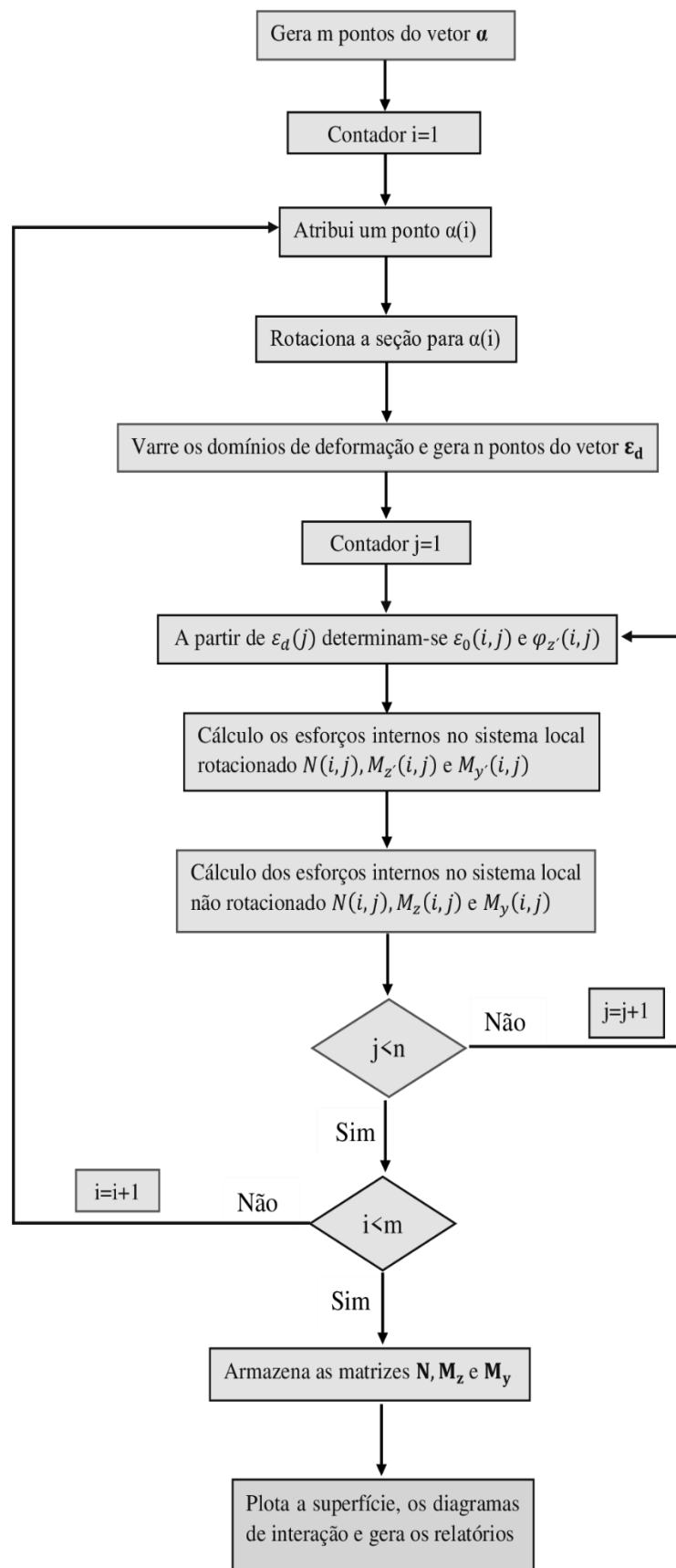
Para aplicação do procedimento descrito com auxílio das equações (4.2) e (4.4), é necessário determinar a deformação axial no eixo de referência,  $\varepsilon_0$ , e a curvatura em torno da abscissa rotacionada,  $\varphi_{z'}$ , as quais representam deformações generalizadas que conduzem a seção transversal à ruptura. Isso pode ser feito fazendo-se uma varredura em todos os domínios de deformações, com o auxílio da variável adimensional (D), prefixando as deformações extremas ( $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_s$ ). As distâncias  $y'_c$  e  $y'_s$  também são conhecidas após o pré-processamento da seção transversal. A Figura 27 ilustra esse processo. Admitindo um vetor  $\mathbf{\varepsilon}_d = [\varepsilon_c \quad \varepsilon_s]^T$ , os valores de  $\varepsilon_0$  e  $\varphi_{z'}$  podem ser encontrados resolvendo o sistema linear representado na equação (4.5). O fluxograma da Figura 28 ilustra todo o processo para determinação da superfície de interação.

$$\mathbf{\varepsilon}_d = \begin{bmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -y'_c \\ 1 & -y'_s \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi_{z'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi_{z'} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -y'_c \\ 1 & -y'_s \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{\varepsilon}_d \quad (\text{Equação 4.5})$$



**Figura 27:** Deformações nas fibras de concreto e aço.



**Figura 28:** Fluxograma para o cálculo da superfície e diagrama de interação.

#### 4.4 – Obtenção da relação $M-\varphi-N-\alpha$

Com o intuito de fazer uma avaliação estrutural de uma seção transversal, é importante ter um modelo comportamental da estrutura, que seja capaz de prever a rigidez à flexão para quaisquer ângulos de incidência de carga e esforço normal solicitantes. Com esse propósito, a relação de momento *versus* curvatura é ideal para determinar a capacidade de flexão máxima da seção e fornecer informações gerais sobre a rigidez à flexão da mesma.

A relação Momento-Curvatura-Normal-Inclinação da Linha Neutra ( $M-\varphi-N-\alpha$ ) é calculada para uma força normal externa,  $N_{ext}$ , prefixada e para um ângulo  $\alpha$  também atribuído *a priori*, o fluxograma mostrado na Figura 29 sintetiza esse procedimento. Cada ponto da relação é obtido após o término de um ciclo de Newton-Raphson, onde a deformação axial é determinada de modo a minimizar a diferença entre a força normal externa e o esforço normal interno, para um valor controlado de curvatura.

As equações (4.6), (4.7) e (4.8) a seguir expressam o cálculo da força normal interna, do momento resultante interno e da rigidez axial de uma seção transversal, respectivamente. Para dado valor de curvatura em cada ciclo de Newton-Raphson, sendo  $j = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $n$  o número de pontos resultantes da discretização da função relação momento – curvatura,  $\varepsilon_{ci}^{(j)}$  e  $\varepsilon_{si}^{(j)}$ , representam as deformações no concreto e no aço em cada iteração, e  $y'_{ci}$  e  $y'_{si}$  são as coordenadas das fibras de concreto e barras de aço no sistema rotacionado para cada valor fixo da linha neutra.

$$N^{(j)} = \sum_{i=1}^{na} \sigma_{ci}(\varepsilon_{ci}^{(j)}) \cdot \Delta A_i + \sum_{i=1}^{nb} \left[ \sigma_{si}(\varepsilon_{si}^{(j)}) \cdot A_{si} - \sigma_{ci}(\varepsilon_{si}^{(j)}) \cdot A_{si} \right] \quad (\text{Equação 4.6})$$

$$M_z^{(j)} = \sum_{i=1}^{na} \sigma_{ci}(\varepsilon_{ci}^{(j)}) \cdot y'_{ci} \cdot \Delta A_i + \sum_{i=1}^{nb} \left[ \sigma_{si}(\varepsilon_{si}^{(j)}) \cdot y'_{si} \cdot A_{si} - \sigma_{ci}(\varepsilon_{si}^{(j)}) \cdot y'_{si} \cdot A_{si} \right] \quad (\text{Equação 4.7})$$

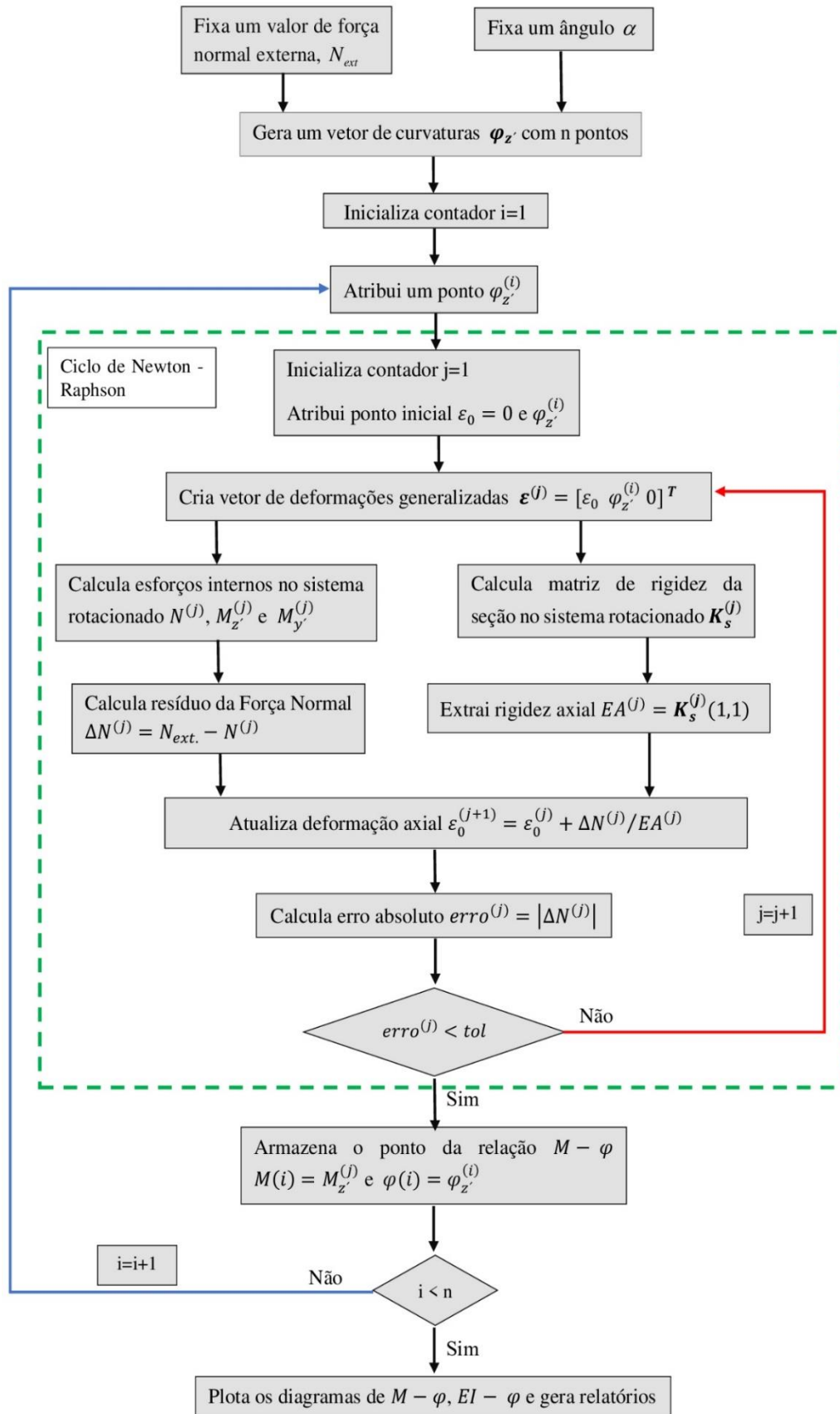
$$\mathbf{K}_s^{(j)}(1,1) = \sum_{i=1}^{na} E_{ci}(\varepsilon_{ci}^{(j)}) \cdot \Delta A_i + \sum_{i=1}^{nb} \left[ E_{si}(\varepsilon_{si}^{(j)}) \cdot A_{si} - E_{ci}(\varepsilon_{si}^{(j)}) \cdot A_{si} \right] \quad (\text{Equação 4.8})$$

Já a rigidez à flexão  $EI$  pode ser determinada aproximando a derivada da função  $M(\varphi)$  por diferenças finitas, conforme a seguinte equação:

$$EI^{(k+1)} = \frac{\delta M^{(k+1)}}{\delta \varphi^{(k+1)}} \approx \frac{M^{(k+1)} - M^{(k)}}{\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}} \quad (\text{Equação 4.9})$$

onde  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , sendo  $n$  o número de pontos resultantes da discretização da função  $M(\varphi)$ .





**Figura 29:** Fluxograma para obtenção da relação  $M-\varphi-N-\alpha$ .

## 5 – TESTES DE VALIDAÇÃO

Esta seção descreve os procedimentos adotados para a verificação da acurácia e eficiência do programa *RCSectionCode*. De início, foi utilizada uma abordagem, via banco de dados, para a verificação da precisão no cálculo dos esforços internos resistentes. Depois, uma análise de seções transversais com diferentes características, estudadas por outros autores, foi feita para a comparação dos diagramas de interação e superfícies resistentes. O Anexo 4 contém todas as informações necessárias ao usuário para a identificação e modificação das variáveis para o prosseguimento da leitura deste texto.

O banco de dados utilizado, apresentado na Tabela 6, representa uma série de ensaios feitos por vários autores em peças retangulares e quadradas variando área de aço, cobrimento e tensão do concreto. Os dados experimentais selecionados podem ser encontrados de forma resumida em Hsu (1988). A escolha desses ensaios é pertinente, pois autores como Vaz Rodrigues (2015) e Rosati *et al.* (2008), os quais desenvolveram pesquisas semelhantes na área, referenciam o mesmo banco de dados para a validação de seus aplicativos propostos. Destarte, é importante manter a coerência na calibração do aplicativo *RCSectionCode*, em comparação com os já existentes.

Para a análise da precisão dos diagramas de interação entre  $M_z$ - $M_y$  e o formato da superfície de interação, uma metodologia similar foi adotada, com as comparações entre as seções transversais estudadas pelos autores que produziram programas de análises similares. Destaca-se a dificuldade em analisar uma grande quantidade de pontos dos diagramas de interação, sendo assim o resultado não será expresso de forma numérica, mas sim com uma avaliação gráfica da concordância entre os valores produzidos por cada autor. Dentre os autores avaliados, as características dos métodos utilizadas em cada análise estão presentes na Tabela 4.

### 5.1 – Base de dados

A base de dados utilizada nessa pesquisa consiste na compilação de 47 ensaios experimentais à flexão composta oblíqua. Outra base de dados também foi utilizada para a análise paramétrica dos elementos de entrada, os quais o usuário tem a possibilidade de modificar na busca por uma melhor precisão dos resultados. Destaca-se que a base de dados abrange seções transversais retangulares e quadrados, com resistência à compressão do concreto entre 18.81 MPa e 80.8 MPa e tensão de escoamento das armaduras entre 275.8 MPa e 558 MPa. Vale ressaltar que os modelos constitutivos utilizados são os da NBR 6118 (ABNT,

2014), tanto para o aço das armaduras quanto para o concreto, sem considerar a tração no concreto.

**Tabela 4:** Características de estudos anteriores selecionados para a comparação dos diagramas de interação.

<b>Autores</b>	<b>Tipo de seção</b>	<b>Leis constitutivas</b>	<b>Subdivisão da seção</b>	<b>Integração das tensões</b>
Rosati et al (2008)	composta	EC02 - parabólica linear	um polígono para cada $\sigma$ - $\epsilon$	forma fechada de cada polígono
Pallarés et al (2009)	concreto armado	EC02 - parabólica linear	sem subdivisões	formas fechadas
Papanikolaou (2012)	composta	arbitrária	sem subdivisões	Green/Gauss com mapeamento adaptativo
Vaz Rodriguez (2015)	composta	EC02 - parabólica linear	trapezoides	integração de Gauss-Legendre
Silva (2015)	concreto armado	NBR 6118 - parábola-retângulo	um polígono para cada $\sigma$ - $\epsilon$	formas fechadas
Chiorean (2017)	composta	parabólica-linear com softening	sem subdivisões	Green/Gauss-Lobatto com bissecção
Presente estudo (2021)	concreto armado	arbitrária	divisões triangulares	soma de Riemann

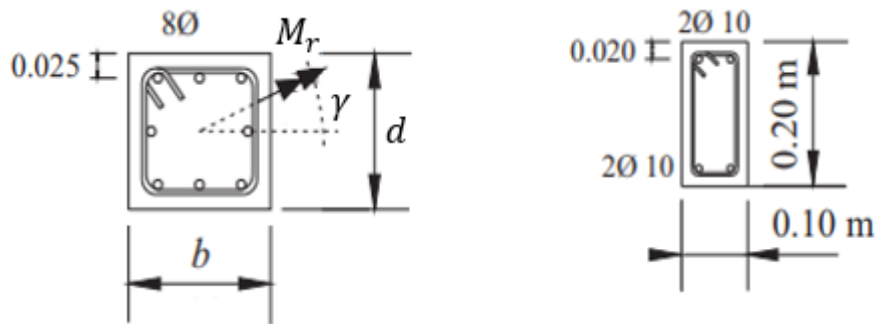
**Fonte:** Autor, 2021.

As características geométricas e de reforço estrutural das seções transversais estudadas por Ramamurthy (1961) e Pallarès *et al.* (2010) estão resumidas na Tabela 5 e Figura 30, já os dados referentes à comparação feita entre os dados experimentais e numéricos estão apresentados na Tabela 6.

**Tabela 5:** Propriedades geométricas das seções do banco de dados.

<b>Propriedades geométricas das seções</b>	<b>b x h (mm)</b>	<b>Barras</b>
Ramamurthy-série A	203.2 x 203.2	8 x 12.5 mm
Ramamurthy-série B	203.2 x 203.2	8 x 16 mm
Ramamurthy-série C	152.4 x 152.4	8 x 12.5 mm
Ramamurthy-série D	152.4 x 228.6	8 x 16 mm
Ramamurthy-série R	152.4 x 152.4	8 x 9.5 mm
Pallarès <i>et al.</i>	100 x 200	4 x 10 mm

**Fonte:** Autor, 2021.



**Figura 30:** Representação da seção transversal dos experimentos de Ramamurthy (1961) e Pallarés *et al.* (2010).

**Tabela 6:** Comparação entre os resultados numéricos e experimentais.

Teste	$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$P$ (exp) (kN)	$M_r$ (exp) (kN.m)	$\gamma$ (°)	$M_r$ (teo) (kN.m)	$M_r(exp)/M_r(teo)$
Ramamurthy-série A							
A-1	46.89	291.9	564.9	51.7	15	51.53	1.00
A-2	51.48	291.9	395.9	52.1	15	49.10	0.94
A-3	49.68	291.9	378.1	49.7	15	47.87	0.96
A-4	43.11	291.9	283.6	44.7	15	42.17	0.94
A-5	38.43	291.9	235.8	43.4	15	38.95	0.90
A-6	36.27	291.9	171.9	36.0	14.5	35.54	0.99
A-7	40.05	291.9	146.8	38.0	11.3	35.35	0.93
A-8	28.71	291.9	476.0	38.6	20	37.39	0.97
A-9	41.58	291.9	280.2	45.5	20	41.24	0.91
A-10	49.86	291.9	462.6	47.5	30	49.10	1.03
A-11	51.66	291.9	264.7	38.8	30	42.54	1.10
A-12	44.64	291.9	170.1	34.6	30	36.45	1.05
A-13	18.81	291.9	164.6	30.1	33.7	28.40	0.94
A-14	26.64	291.9	160.1	36.4	26.57	31.97	0.88
A-15	21.33	291.9	266.9	33.9	45	30.54	0.90
Ramamurthy-série B							
B-1	29.16	322.6	629.0	51.1	15	49.30	0.96
B-2	25.74	322.6	771.8	39.2	22.5	39.33	1.00
B-3	33.48	322.6	533.8	54.2	30	51.25	0.95
B-4	31.95	322.6	395.9	50.3	30	49.25	0.98
B-5	19.53	322.6	598.3	30.4	45	31.82	1.05
B-6	27.54	322.6	500.4	45.8	45	45.06	0.98
B-7	29.52	322.6	516.0	52.4	45	46.70	0.89
B-8	34.11	322.6	369.8	53.1	45	49.63	0.93

Ramamurthy-série C							
C-1	31.14	275.8	464.8	17.7	15	18.79	1.06
C-1(a)	37.08	275.8	569.4	21.7	15	20.36	0.94
C-2	33.93	275.8	400.3	18.3	15	21.31	1.16
C-2(a)	43.47	275.8	489.3	22.4	15	25.15	1.12
C-3	28.98	275.8	460.4	17.5	30	16.82	0.96
C-4	24.12	275.8	378.1	17.3	30	15.51	0.90
C-5	24.84	275.8	506	15.4	45	12.99	0.84
C-6	31.05	275.8	350.3	21.4	45	19.07	0.89
Ramamurthy-série D							
D-1	31.68	322.6	785.1	35.9	33.7	33.87	0.94
D-2	25.47	322.6	400.3	40.7	33.7	34.74	0.85
D-3	24.48	322.6	311.4	42.7	33.7	34.31	0.80
D-4	25.11	322.6	680.6	31.1	45	31.12	1.00
D-5	30.87	322.6	378.1	43.2	45	39.84	0.92
D-6	23.85	322.6	400.3	36.6	60	37.55	1.03
Ramamurthy-série R							
R-138	23.31	275.8	138.3	14.9	45	13.12	0.88
R-238	31.05	275.8	160.1	17.3	45	15.11	0.87
R-338	32.58	275.8	118.8	16.3	33.7	14.53	0.89
R-438	26.64	275.8	71.2	13.0	33.7	12.24	0.94
Pallarès et al							
10_05_3	80	558	473.9	35	14.04	36.31	0.96
10_05_4	80	558	175.2	26.8	14.04	27.71	0.93
10_1_4	80.8	558	166.1	23	26.56	24.97	1.00
10_2_2	78.4	558	899.9	22.8	45	27.00	0.84
10_2_3	80	558	436.5	22.1	45	25.40	0.87
10_2_4	80	558	142	14.4	45	17.41	0.83
Legenda: $f_y$ : tensão de escoamento do aço; $P$ : carregamento axial experimental; $M_r$ : módulo do momento resultante; $\gamma$ relação entre os momentos dado por $\tan^{-1}(M_y/M_z)$					Média		1.03
					Desvio padrão		0.089
					Coef. de variação		8.68

**Fonte:** Autor, 2021.

### 5.1.1 – Avaliação do RCSectionCode quanto à previsão dos resultados

A análise dos resultados consistiu em avaliar o nível de conservadorismo dos valores produzidos pelo *RCSectionCode*. Para tal ação, foi considerada a relação entre os valores produzidos experimentalmente e os valores estimados numericamente. Os valores desta relação

foram interpretados segundo o critério de penalidades proposto por Collins (2001), o DPC – *Demerit Points Classification*, ver Tabela 7.

**Tabela 7:** Adaptado do Critério de Collins (2001).

Mr(exp.) /Mr(teo)	Classificação	Penalidade
<0.50	Extremamente perigoso	10
[0.50 – 0.85[	Perigoso	5
[0.85 – 1.15[	Segurança apropriada	0
[1.15 – 2.00[	Conservador	1
>2.00	Extremamente conservador	2

**Fonte:** Collins (2001), adaptado.

Com os resultados apresentados na Tabela 8 é possível concluir que o referido programa demonstra uma segurança apropriada quanto à previsão de resultados à flexão composta oblíqua, pois a maioria dos resultados se encontra na faixa do intervalo [0,85 – 1,15[ e o coeficiente de variação é baixo. Destaca-se a presença de valores perigosos na série de concreto de alta resistência, porém esses valores podem estar relacionados com o modelo constitutivo utilizado.

**Tabela 8:** Classificação segundo o critério de Collins (2001).

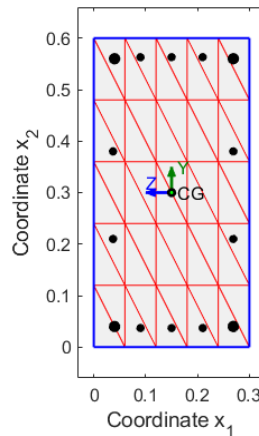
Mr(exp)/Mr(teo)		<0.50	[0.50 – 0.85[	[0.85 – 1.15[	[1.15 – 2.00[	>2.00	Total
Ramamurthy-série A	Nº ensaios	0	0	15	0	0	15
	Pen. Total	0	0	0	0	0	0
Ramamurthy-série B	Nº ensaios	0	0	8	0	0	8
	Pen. Total	0	0	0	0	0	0
Ramamurthy-série C	Nº ensaios	0	1	6	1	0	8
	Pen. Total	0	5	0	1	0	6
Ramamurthy-série D	Nº ensaios	0	1	3	2	0	6
	Pen. Total	0	5	0	2	0	7
Ramamurthy-série R	Nº ensaios	0	0	4	0	0	4
	Pen. Total	0	0	0	0	0	0
Pallarès <i>et al.</i>	Nº ensaios	0	2	4	0	0	6
	Pen. Total	0	10	0	0	0	10

**Fonte:** Autor, 2021.

## 5.2 – Diagramas e superfícies de interação.

### 5.2.1 – Seção transversal retangular - Rosati *et al.* (2008).

O primeiro exemplo mostra os resultados dos diagramas de interação correspondentes à seção da Figura 31. A seção é composta por um concreto com tensão de compressão igual a 20.75 MPa, a tração no concreto foi desconsiderada e a tensão de escoamento do aço corresponde à 375 MPa, os modelos constitutivos para o concreto e para o aço das armaduras foram o parábola-retângulo e o elastoplástico sugeridos pela NBR6118 (ABNT, 2014). O cobrimento da armadura é de 30 mm e as barras localizadas nos cantos são de 20 mm de diâmetro e as demais são de 14 mm, todas igualmente espaçadas entre si. Para mais informações sobre o detalhamento das seções consultar o Anexo 3.

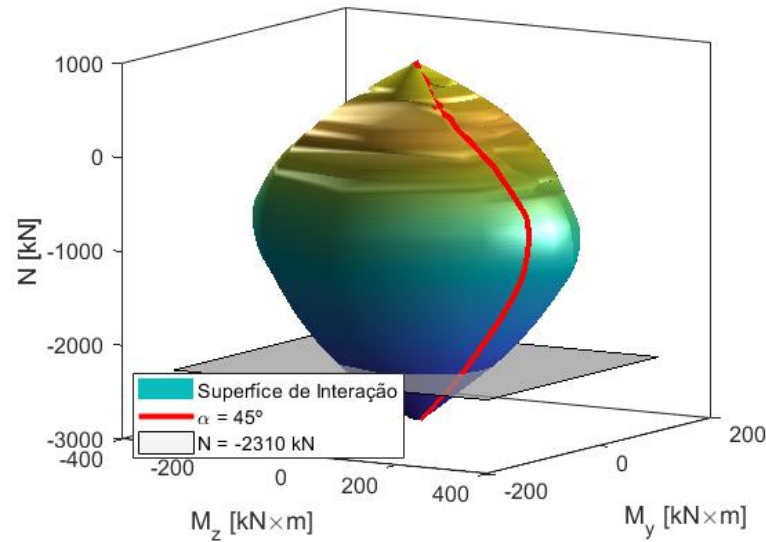


**Figura 31:** Seção transversal retangular em discretização de 5 x 5.

Para a entrada de dados nos modelos constitutivos foram necessárias modificações nas tensões dos materiais, já que o estudo do referido autor trabalha com coeficientes de ponderação, 1.6 para a compressão do concreto e 1.15 para as armaduras. Sendo assim, os valores utilizados no *RCSectionCode* são:  $f_c = 0.85 \times 20.75 / 1.6 = 11.02$  MPa;  $f_y = 375 / 1.15 = 326.09$  MPa.

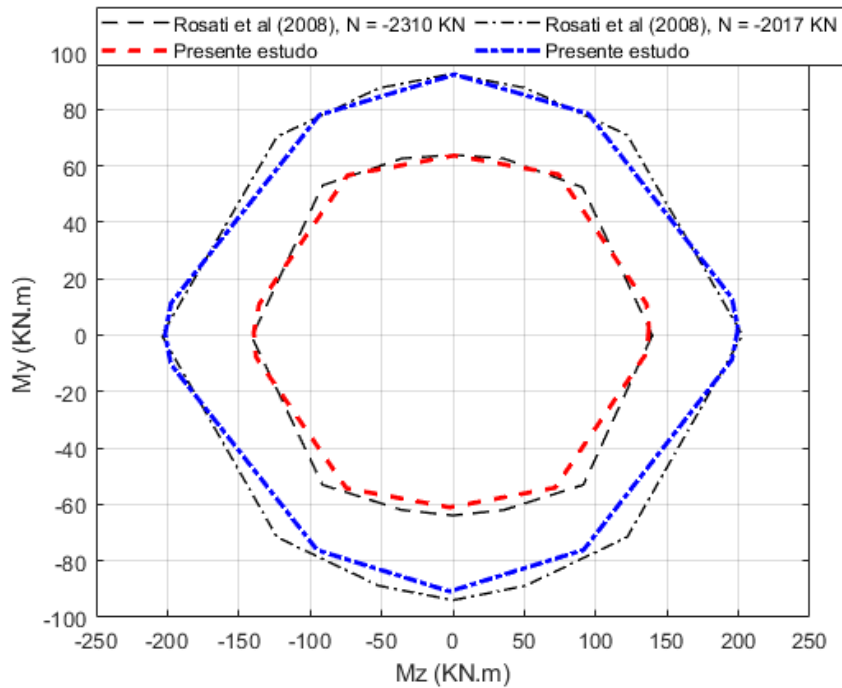
A malha de triangulação de *Delaunay* foi simétrica, com  $n_v = n_H = 5$ , o que gera um total de 50 fibras triangulares. Adotou-se incrementos de inclinação da linha neutra,  $\Delta\alpha$ , de  $30^\circ$ , o que corresponde a 13 pontos de coordenadas  $M_y$ - $M_z$ . Essa discretização faz parte de um critério adotado neste trabalho, que consiste em repetir as condições adotadas por cada pesquisador no desenvolvimento de seu correspondente programa de análise. Dessa maneira, o número de pontos para cada estado de deformação correspondente aos incrementos da linha neutra é de 100 e o total para o diagrama de interação é de 400.

A superfície de interação da Figura 32, em escala de cores, explicita os esforços máximos resistentes de compressão,  $N = -2914$  kN, e tração  $N = 912$  kN. As curvas do diagrama de interação (Figura 33) foram calculadas para  $N = -2310$  kN e  $N = -2017$  kN (o sinal negativo indica esforços de compressão).



**Figura 32:** Superfície de interação correspondente à seção retangular.

Como apresentado na Figura 33, nota-se uma grande semelhança entre os resultados produzidos por ambas as pesquisas, as pequenas diferenças são justificadas, pois Rosati *et al.* (2008) não considera a subtração dos esforços onde há a sobreposição entre os materiais.



**Figura 33:** Diagrama de interação correspondente à seção retangular.

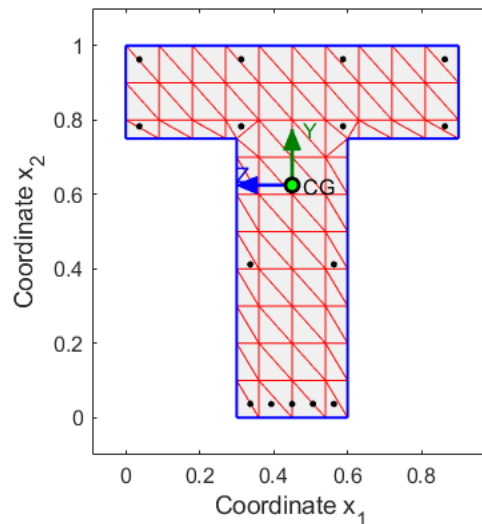


### 5.2.2 – Seção transversal em T – Rosati *et al.* (2008).

Na seção transversal em T, Figura 34, as barras de reforço longitudinal têm o mesmo diâmetro, 14 mm, e o mesmo cobrimento. Os mesmos coeficientes de ponderação, modelos constitutivos e tensões dos materiais também foram mantidos iguais ao do exemplo anterior.

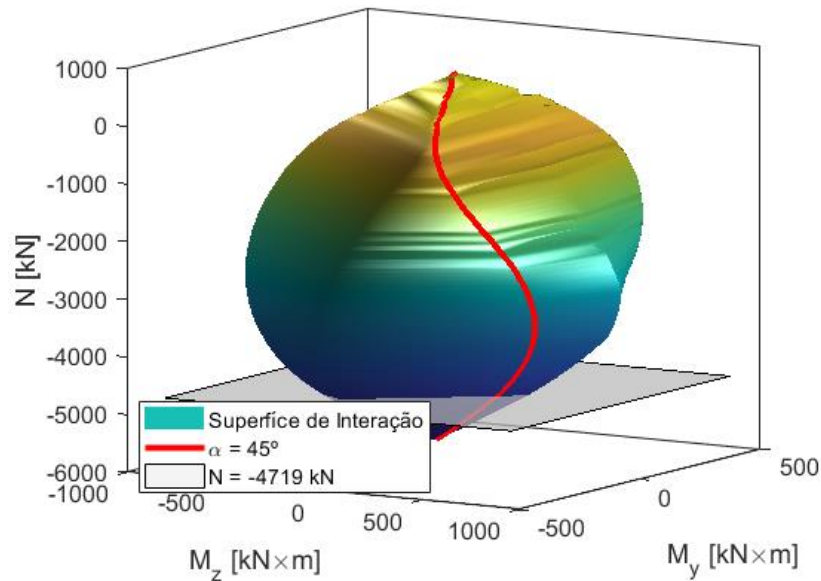
A modelagem da seção foi feita com uma triangulação de *Delaunay* em 120 fibras triangulares, o que corresponde a uma malha de  $n_H = n_V = 10$ . Os modelos constitutivos utilizados para o concreto foram o da NBR 6118 (ABNT, 2014) para a compressão do concreto e a tensão de tração foi desconsiderada. O módulo de elasticidade do concreto foi de 25.50 GPa.

O valor de  $45^\circ$  para o incremento do ângulo de inclinação da linha neutra foi adotado, o que gera um total de 9 pontos de rotação. Já para os estados de deformação, o valor adotado de 100 foi o ideal. A superfície de interação da seção transversal em T, Figura 35, apresenta resistência máxima na tração de  $N = 753$  kN e na compressão de  $N = -5657$  kN.



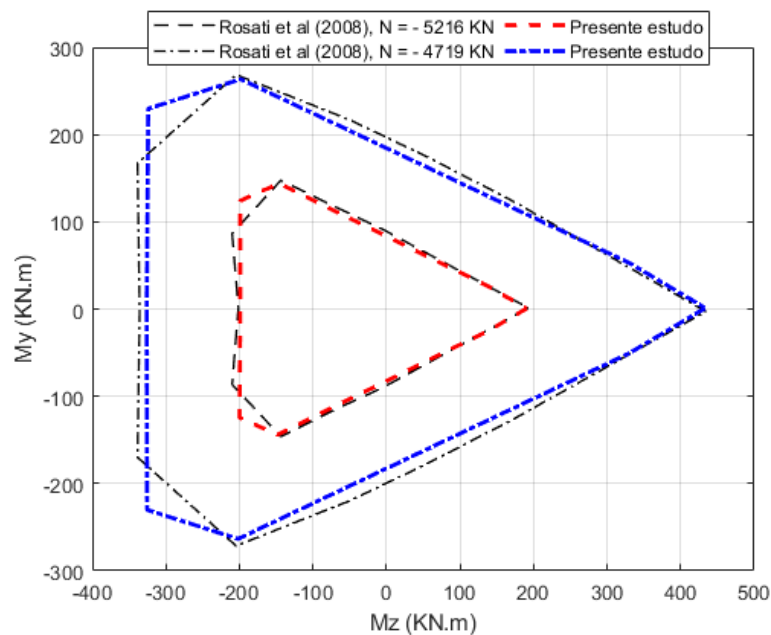
**Figura 34:** Seção transversal T em discretização 10 x 10.

O diagrama de interação apresentado na Figura 36 foi calculado para as forças normais de compressão de  $N = -5216$  kN e  $N = -4719$  kN.



**Figura 35:** Superfície de interação correspondente à seção T.

Os resultados que comparam os dois programas, Figura 36, estão em boa concordância, sendo que pequenas divergências ocorrem nos quadrantes negativos dos momentos devido ao baixo valor de incremento angular utilizado por Rosati *et al.* (2008) neste exemplo.

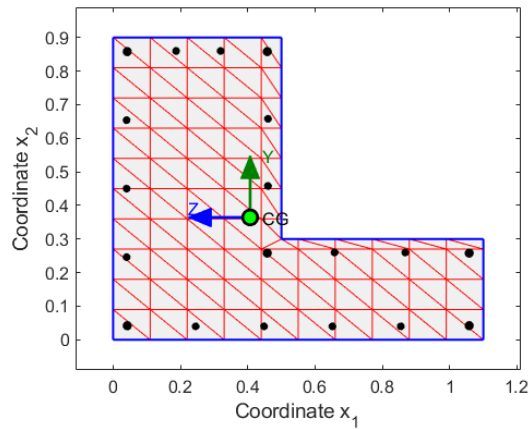


**Figura 36:** Diagramas interação para a seção T.

### 5.2.3 – Seção transversal em L – Rosati *et al* (2008).

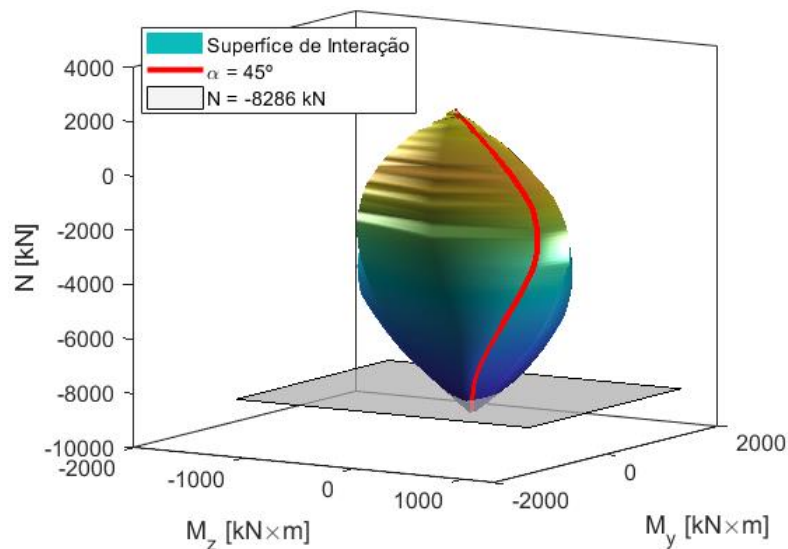
Na seção em L da Figura 37, os valores das tensões, modelos constitutivos e cobrimento também estão mantidos em relação aos exercícios precedentes. No entanto, o diâmetro das barras é diferente, as barras posicionadas nos cantos têm valor de 24 mm e as demais têm o

valor de 20 mm. Os modelos constitutivos tanto para o aço quanto para o concreto foram os mesmos dos exemplos anteriores.



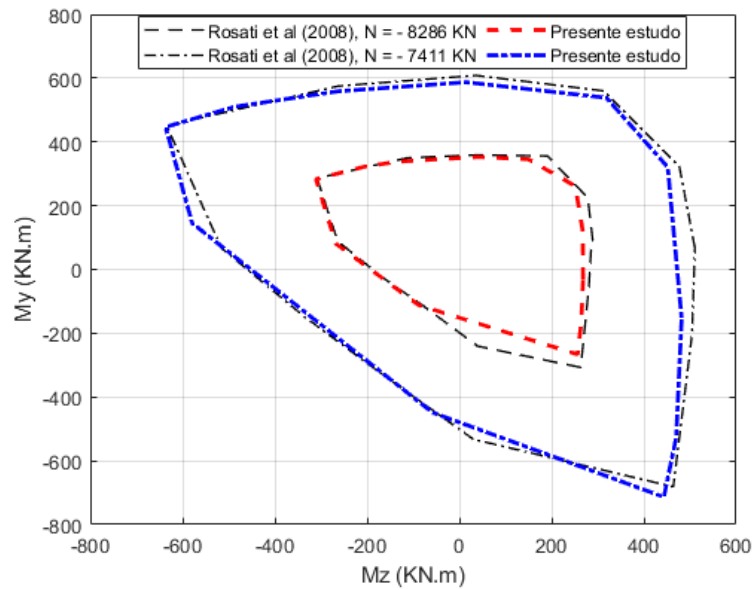
**Figura 37:** Seção transversal L em discretização de 10 x 10.

A seção em questão foi discretizando em 142 fibras triangulares, o que corresponde a uma malha de  $n_H = n_V = 10$ , em cada domínio de deformação foram implementados 100 pontos e o incremento angular foi de 30°. Os esforços axiais de compressão testados para a seção correspondem aos valores  $N = -8286$  kN e  $N = -7411$  kN. A superfície de interação, Figura 38, revela os esforços máximos de compressão e tração, -9085 kN e 2217 kN, respectivamente.



**Figura 38:** Superfície de interação correspondente à seção L.

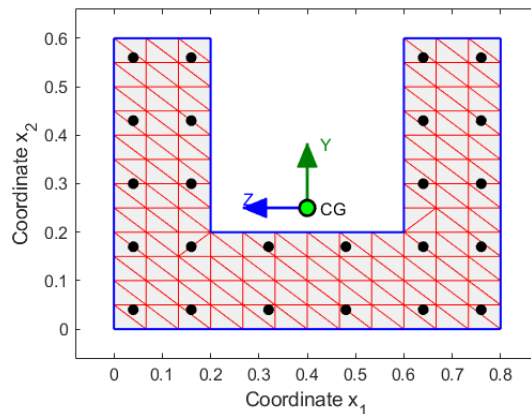
Novamente os resultados comparativos, Figura 39, demonstram relativa acurácia entre os métodos, reforçando que as diferenças notadas nos diagramas de interação são relativas à sobreposição dos materiais.



**Figura 39:** Digrama de interação para a seção em L.

#### 5.2.4 – Seção transversal em U.

A seção em U, Figura 40, será comparada com dois autores, Rosati *et al.* (2008) e Vaz Rodrigues (2015), o que é possível pela disponibilidade desses dados na literatura. Nos dados concernentes às características da seção, os modelos constitutivos utilizados foram os mesmos dos exemplos anteriores. As barras têm o mesmo diâmetro de 20 mm entre si e as tensões de compressão e escoamento do aço, bem como o cobrimento de 30 mm são mantidos.

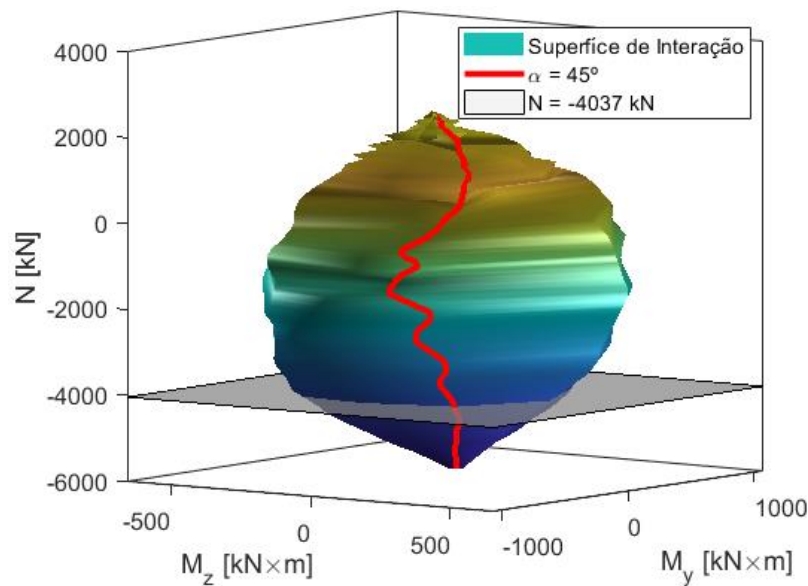


**Figura 40:** Seção transversal U em discretização de 12 x 12.

A discretização da triangulação de Delaunay é simétrica e igual a  $n_H = n_V = 8$ , o que gera um total de 101 fibras triangulares. Os dados referentes ao incremento da linha neutra e a quantidade de pontos em cada domínio de deformação foram diferentes em cada um dos testes.

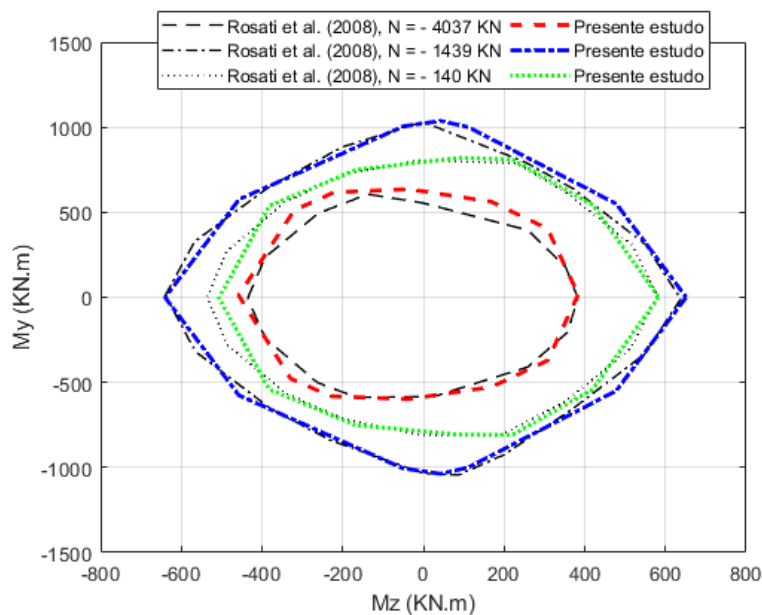
A Figura 41 assinala que os maiores valores de trações suportados pela seção é de 2458 kN e o máximo valor de compressão é de -5811 kN.

Para a comparação dos diagramas de interação com Rosati *et al.* (2008), Figura 42, foram utilizados 35 pontos em cada domínio e o incremento angular foi de 30°. Já para a comparação com os resultados de Vaz Rodrigues (2015), Figura 43, a discretização angular e a quantidade de pontos em cada domínio foram de 10° e 100, respectivamente. As análises foram feitas para três esforços axiais de compressão  $N = -4037$  kN,  $N = -1439$  kN e  $N = -140$  kN.

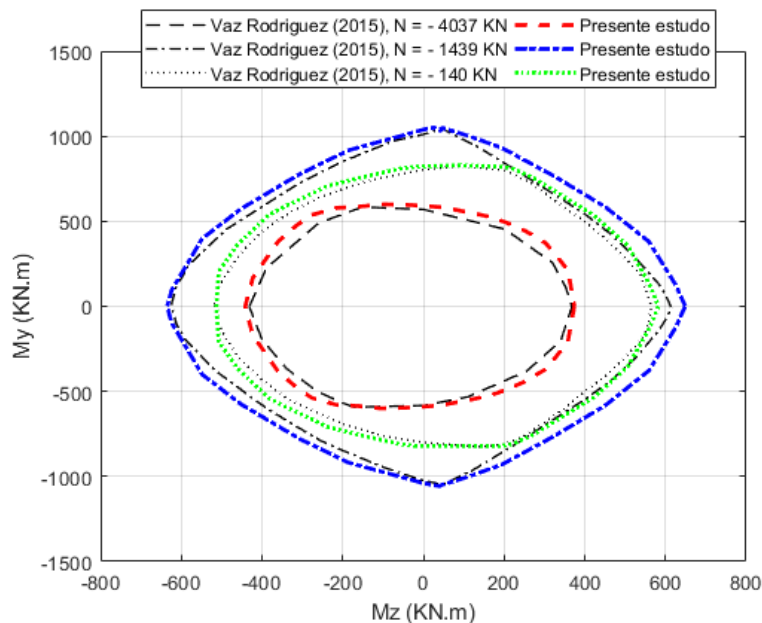


**Figura 41:** Superfície de interação correspondente à seção U.

Na análise comparativa com Rosati *et al.* (2008), Figura 42, a diferença mais notável foi encontrada entre os resultados para a força normal de -4037 kN. Isso pode ser explicado pela quantidade de pontos em cada domínio de deformação, já que o método utilizado por Rosati *et al.* (2008) não adota esse tipo de metodologia, porém os outros testes não assinalaram maiores divergências.



**Figura 42:** Diagrama de interações da seção U comparado com Rosati *et al.* (2008).



**Figura 43:** Diagrama de interações da seção U comparado com Vaz Rodrigues (2015).

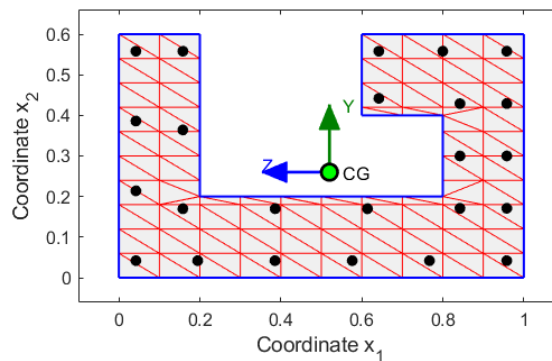
Quanto aos testes comparativos com Vaz Rodrigues (2015), Figura 43, os resultados com maiores divergências foram apresentados no quadrante positivo do gráfico para a força axial de -1439 kN, também é possível explicar essa divergência quanto ao número de pontos por domínio de deformação, uma vez que o referido autor usou um total de 48800 pontos para o refinamento do diagrama de interação, enquanto que essa quantidade de pontos nos domínios

de deformação representaria um grande custo computacional e demanda de tempo utilizando o método proposto nesta dissertação.

#### 5.2.5 – Seção transversal em G.

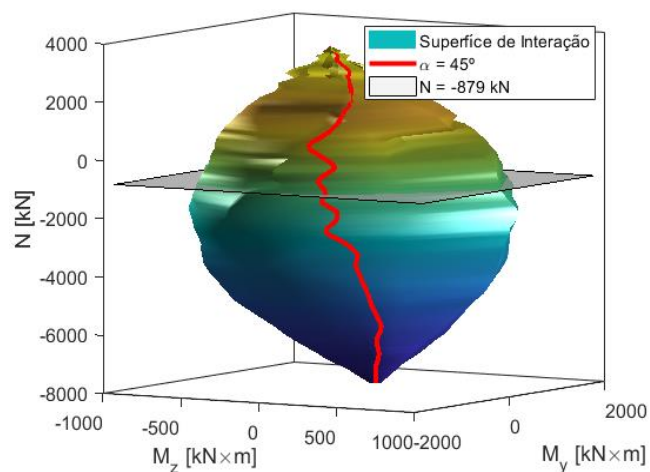
O mesmo método de comparação entre dois autores foi seguindo neste exemplo, os resultados serão comparados com os de Vaz Rodrigues (2015) e Papanikolaou (2012). A seção em G, apresentada na Figura 44, tem todas as barras de reforço longitudinal iguais a 24 mm, a tensão de compressão do concreto e a tensão de escoamento do aço, já ajustadas com os devidos coeficientes de ponderação são, respectivamente, 11.023 MPa e 326.0869 MPa. Os modelos constitutivos, para o concreto e aço, adotados são os da NBR 6118 (ABNT, 2014), negligenciando a tensão de tração do concreto.

A malha de triangulação correspondente a este exemplo foi de  $n_H = n_V = 10$  com um total de 147 fibras triangulares. O incremento do ângulo de inclinação da linha neutra foi de  $10^\circ$  para ambos os exemplos, bem como a quantidade de 100 pontos para varredura dos domínios de deformação. As forças axiais foram de compressão e correspondem a  $N = -6182$  kN e  $N = -879$  kN.



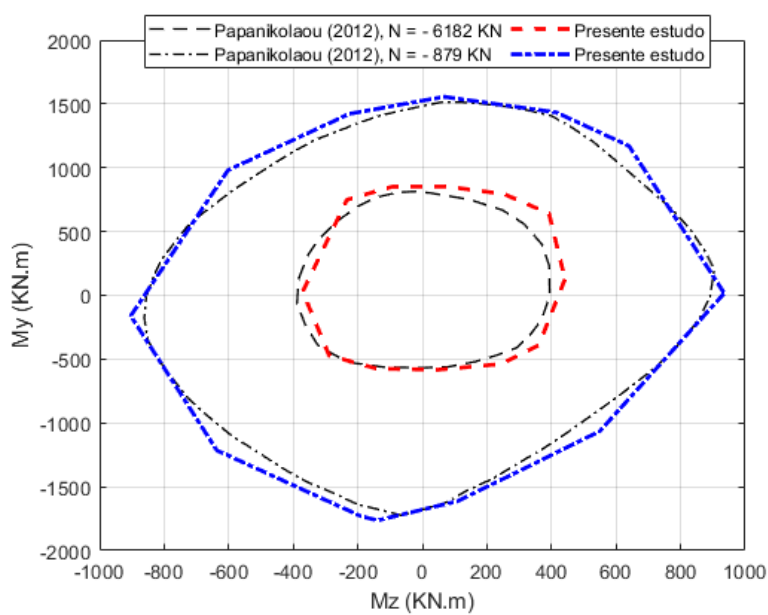
**Figura 44:** Seção transversal G em discretização de 10 x 10.

Para a leitura dos valores máximos dos esforços axiais através da Figura 45, depreende-se que a máxima compressão suportada é -7845 KN e a máxima tração vale 3687 KN.



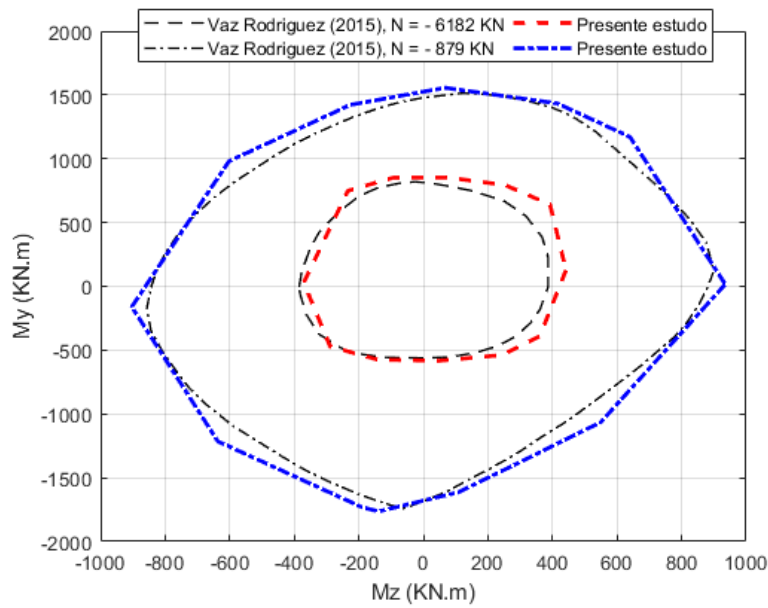
**Figura 45:** Superfície de interação correspondente à seção G.

Os dados apresentados nas Figuras 46 e 47 mostram boa comparação entre os resultados produzidos para a mesma seção entre os autores.



**Figura 46:** Diagramas de interação para a seção G em comparação com Papanikolaou (2012).



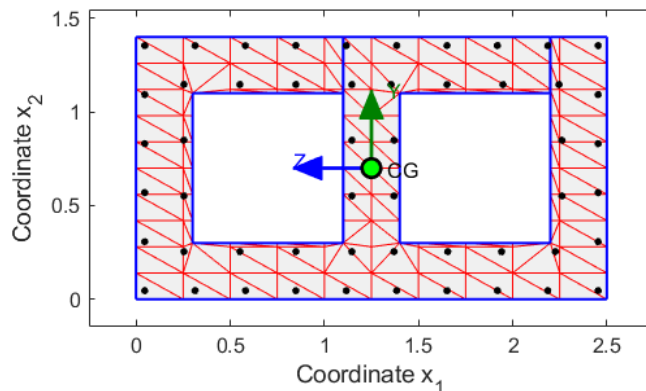


**Figura 47:** Diagramas de interação para a seção G em comparação com Vaz Rodrigues (2015).

#### 5.2.6 – Seção transversal multicelular.

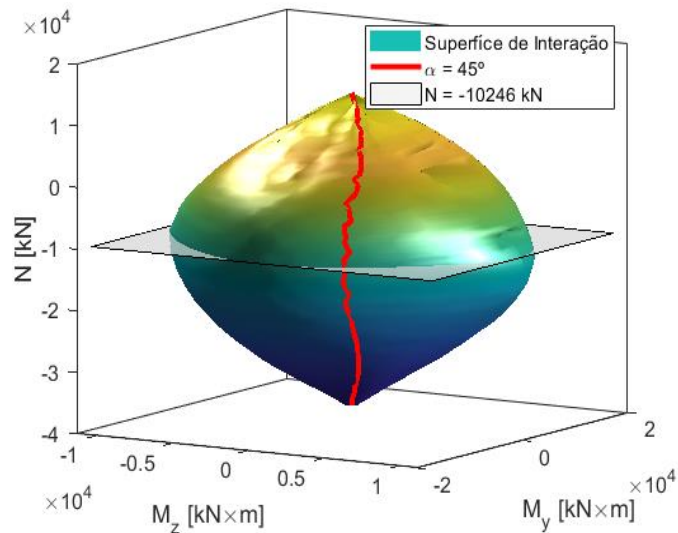
O sexto exemplo, cujos resultados são mostrados na Figura 48, refere-se a uma seção transversal com 2 furos e espessura de parede em 30 cm, esse exemplo também foi estudado comparando os mesmos autores da seção anterior. Um total de 52 barras de 32 mm está posicionado com cobertura de 30 mm e espaçamento igual entre si. Repetem-se os modelos constitutivos e tensões de compressão e escoamento do exemplo anterior.

A malha de triangulação foi feita com  $n_H = n_V = 10$  e 192 fibras triangulares. Para o incremento do ângulo de inclinação da linha neutra e quantidade de pontos em cada domínio, foram utilizados  $15^\circ$  e 100 pontos, respectivamente. Os diagramas de interação foram calculados para duas forças de compressão  $N = -34129$  kN e  $N = -10246$  kN e uma de tração  $N = 5676$  kN.



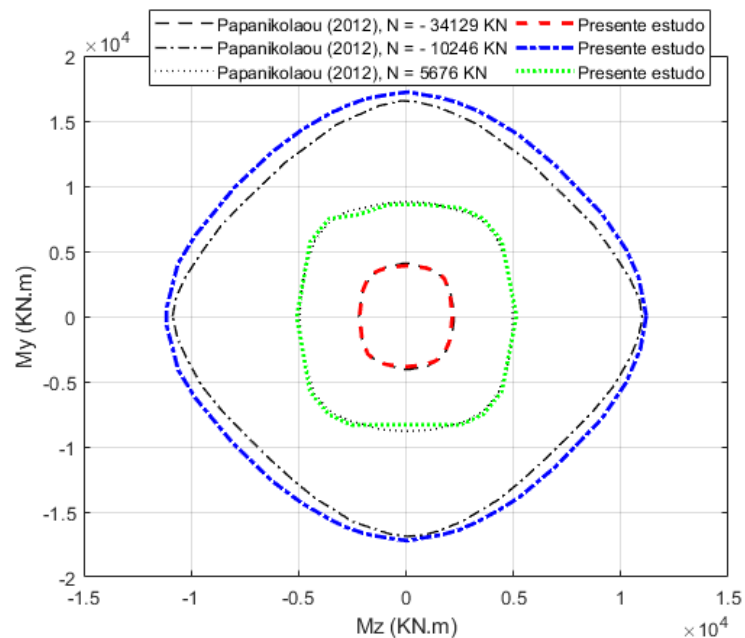
**Figura 48:** Seção transversal multicelular em discretização de 10 x 10.

A seção multicelular estudada neste exemplo é capaz de suportar um esforço axial de 37120 kN em compressão e 13630 kN em tração, Figura 49.

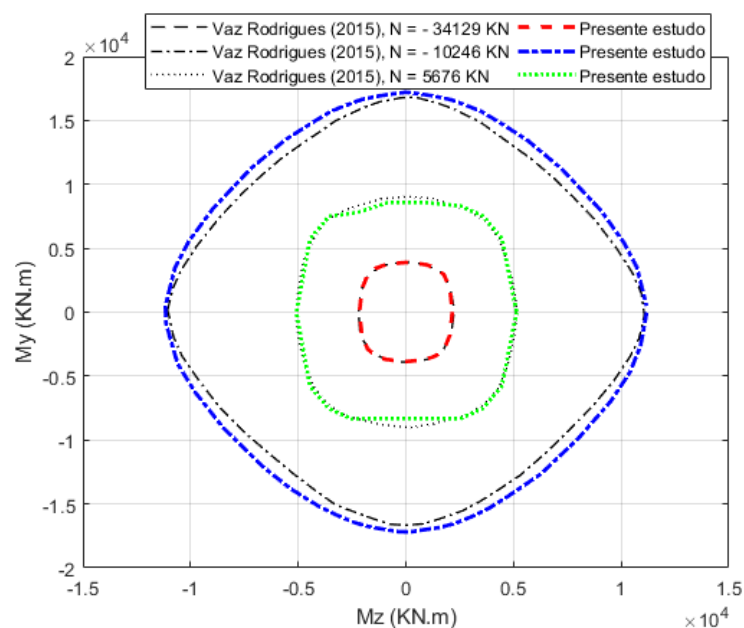


**Figura 49:** Superfície de interação correspondente à seção multicelular.

Os resultados comparativos apresentados nas Figuras 50 e 51 mostram boa convergência entre os métodos analisados tanto para os esforços de tração e compressão.



**Figura 50:** Diagramas de interação para a seção multicelular em comparação com Papanikolaou (2012).



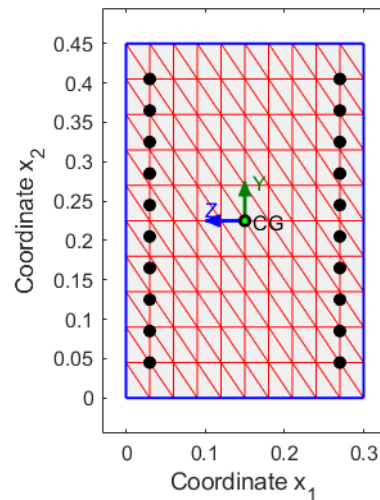
**Figura 51:** Diagramas de interação para a seção multicelular em comparação com Vaz Rodrigues (2015).

#### 5.2.7 - Seção transversal retangular.

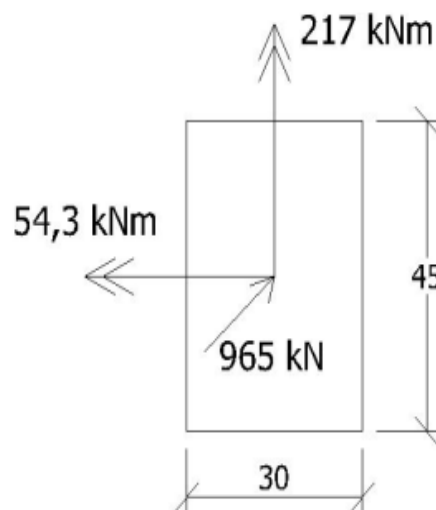
Através dos testes realizados nas seções anteriores é possível comparar a formulação proposta da ferramenta em discussão com outras ferramentas existentes na literatura especializada. Entretanto, como o objetivo deste trabalho não é fazer comparações em termos de concordância entre as curvas de interações, as seções transversais que foram dimensionadas à flexão composta oblíqua também serão testadas e avaliadas conforme o fator de segurança descrito na seção 2.3.

O primeiro exemplo que testa o fator de segurança ao dimensionamento é apresentado em Silva (2015), correspondente a uma seção retangular de 45 x 30 cm. A distância das faces até as armaduras é de 30 mm. A seção possui duas camadas de armaduras, cada uma com 10 barras de 14,79 mm de diâmetro, totalizando uma área de 33,268 cm<sup>2</sup> (ver Figura 52). A seção foi calculada para uma resistência de compressão do concreto e tensão de escoamento do aço, fatoradas por coeficientes parciais, de 17.180 MPa e 434.780 MPa, respectivamente. Os modelos constitutivos da seção correspondem aqueles propostos pela NBR 6118 (ABNT, 2014), tanto para o aço, quanto para o concreto. A resistência à tração do concreto foi desconsiderada. A seção foi dimensionada para suportar uma força axial de compressão no valor de -965 KN, e momentos nos eixos z e y de 54.3 kN.m e 217 kN.m, respectivamente. A Figura 53 mostra a atuação desses esforços na seção.

A discretização da malha de triangulação foi de  $n_H = n_V = 10$ , totalizando 200 fibras triangulares. O incremento angular da linha neutra adotado foi de  $10^\circ$ , o que gera 37 pontos nos diagramas de interação entre momentos. Já para a varredura de domínios adotou-se 80 pontos de deformação.



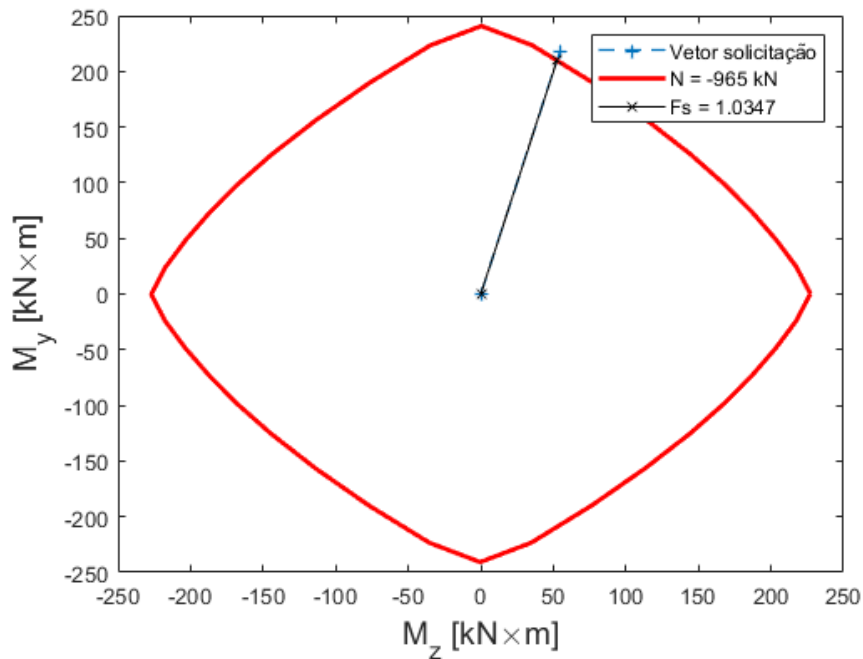
**Figura 52:** Seção transversal retangular em discretização de 10 x 10.



**Figura 53:** Representação dos esforços solicitantes na seção retangular. Adaptado de Silva (2015).

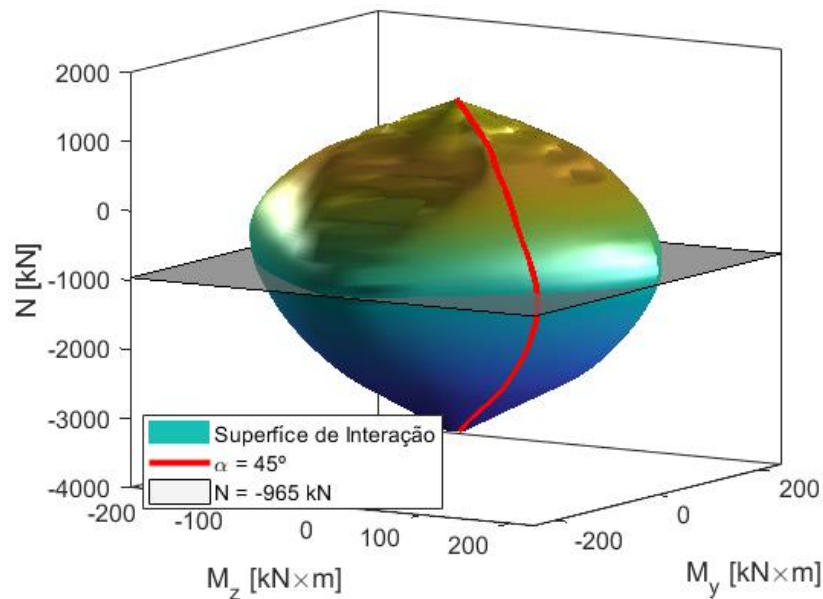
O fator de segurança, Figura 54, calculado para a seção foi de 1.0347, apesar de o valor exceder ligeiramente o valor limite de 1, é possível confirmar que as armaduras e dimensões da seção foram dimensionadas corretamente. Silva (2015) também encontrou a mesma diferença para o dimensionamento da seção, porém o referido autor comenta que podem existir erros de

leitura nos ábacos de dimensionamento à flexão composta oblíqua e, portanto, considera o resultado do dimensionamento satisfatório.



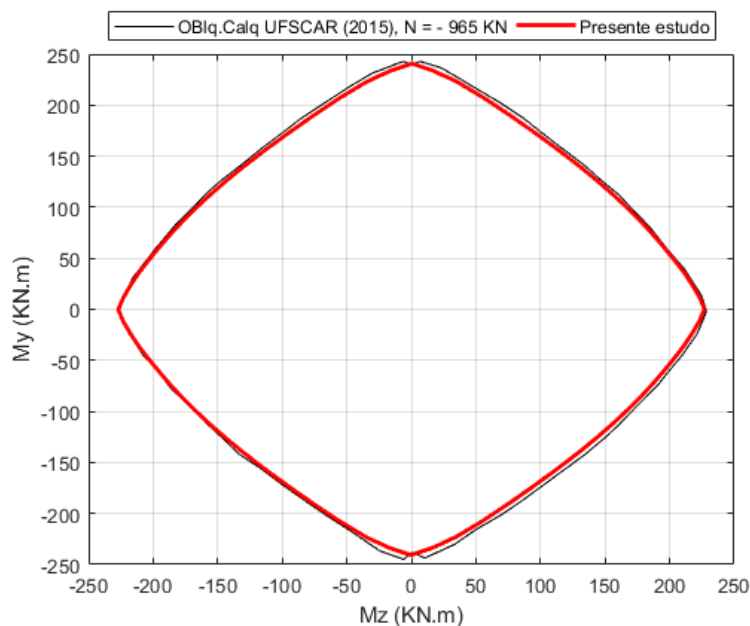
**Figura 54:** Representação do fator de solicação da seção à flexão composta oblíqua.

A Figura 55 mostra superfície de interação para a seção transversal em estudo e os valores extremos suportados pela seção são 1446 kN e -3343 kN, na tração e compressão centradas, respectivamente.



**Figura 55:** Superfície de interação correspondente à seção retangular em flexão composta oblíqua.

Os resultados comparativos entre os dois diagramas de interação são praticamente coincidentes, conforme mostrado na Figura 56.



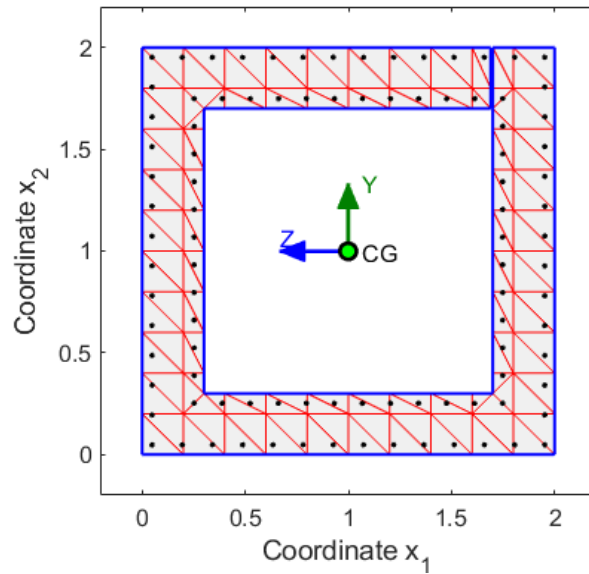
**Figura 56:** Comparação entre os resultados produzido pelo programa de Silva (2015) e pela ferramenta *RCSectionCode*.

#### 5.2.8 – Seção transversal vazada.

A seção circular vazada deste exemplo foi dimensionada por Vaz Rodrigues (2015) e foi submetida a um esforço de compressão de -10000 kN, e momentos de 10400 kN.m nas duas direções. A Figura 57 ilustra as características geométricas da seção, bem como a distribuição das armaduras, que totalizam uma área de 304,2 cm<sup>2</sup> divididas em 4 camadas externas e internas com barras de 20 mm de diâmetro. O cobrimento utilizado foi de 30 mm até a face da barra.

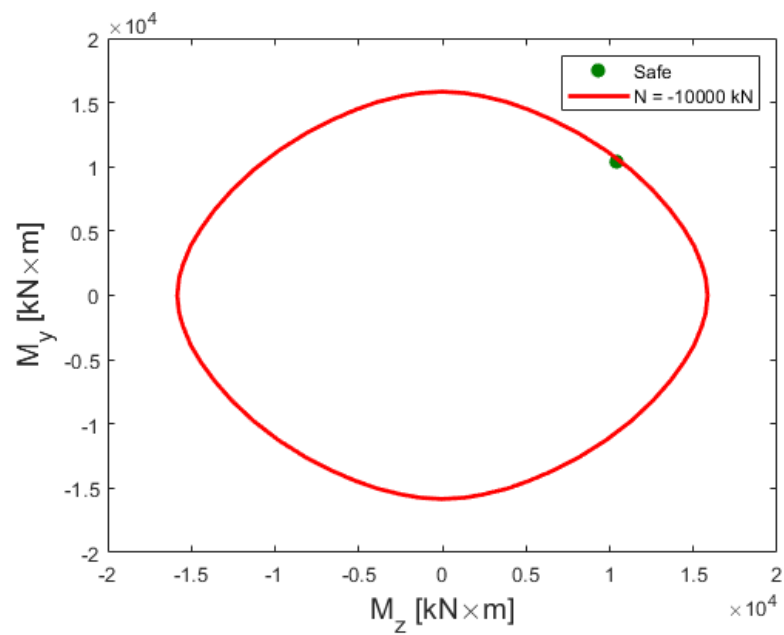
A resistência à compressão do concreto e a tensão de escoamento do aço, já com as devidas ponderações, foram de 16 MPa e 347.830 MPa, respectivamente. Os modelos constitutivos adotados pelo referido autor são os do EUROCODE 2 (EN-1992-1-1). No entanto, aproveitando as similaridades desse código normativo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), nenhuma modificação foi necessária nos modelos já definidos.

O incremento angular da linha neutra foi de 20° e 100 pontos para varredura dos domínios de deformação foram suficientes para encontrar o valor produzido por Vaz Rodrigues (2015). A malha de triangulação foi de  $n_H = n_V = 10$ , totalizando 139 fibras da triangulação.



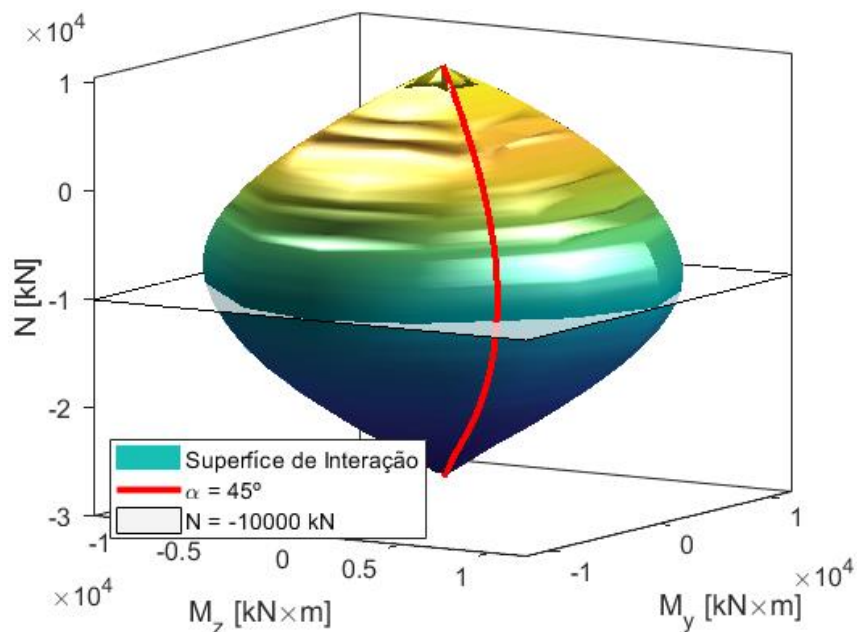
**Figura 57:** Seção transversal vazada com discretização de 10 x 10.

Na Figura 58, o fator de segurança retorna o texto '*SAFE*', o que significa que a seção foi dimensionada corretamente para os momentos e esforços externos solicitantes.



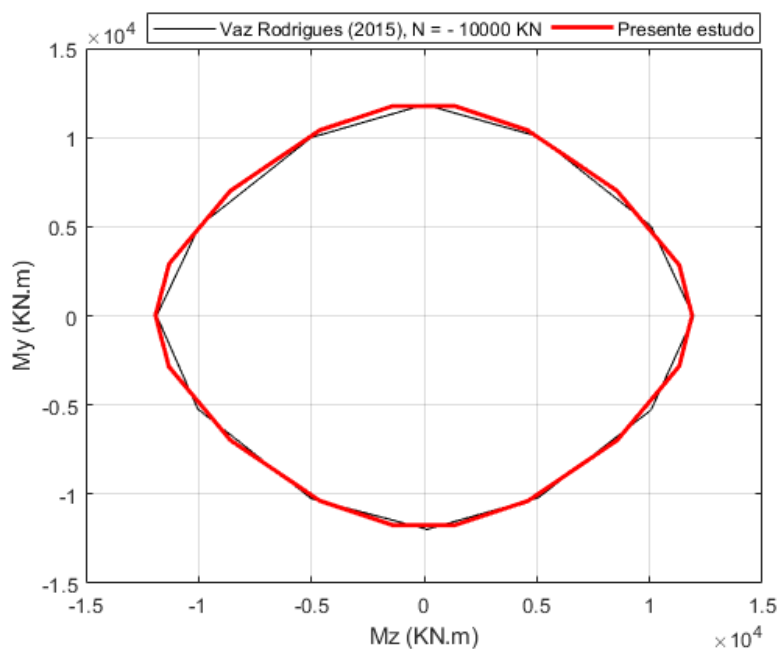
**Figura 58:** Representação do fator de segurança da seção.

A Figura 59, correspondente à superfície de interação da seção vazada, resume os valores máximos de compressão centrada,  $N = -42060$  kN, e tração centrada,  $N = 10490$  kN.



**Figura 59:** Superfície de interação correspondente à seção vazada.

A comparação dos diagramas de interação, Figura 60, mostra que os resultados são quase coincidentes, o que demonstra o bom desempenho do *RCSectionCode*, uma vez que Vaz Rodrigues (2015) precisou de uma discretização angular de 6° e um total de 48800 pontos para representar os domínios de deformação da seção.



**Figura 60:** Diagrama de interação comparando Vaz Rodrigues (2015) e *RCSectionCode* quanto ao dimensionamento de uma seção vazada.

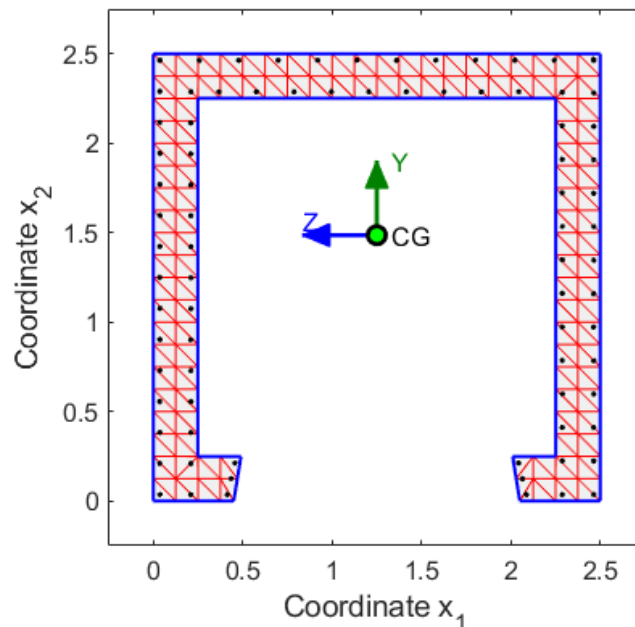


### 5.2.9 – Seção “Staircase”

A seção estudada por Chiorean (2013), mostrada na Figura 61, é nomeada de “staircase”, a qual também será adotada neste trabalho. Esta seção transversal consiste em 84 barras de diâmetro igual a 21,9 mm e cobrimento de 30 mm a partir das faces até a armadura. A seção transversal foi submetida a um esforço de compressão de -7731.1 kN e momentos de 11725.5 KN.m na direção  $z$  e 10737 KN.m na direção  $y$ . A resistência à compressão do concreto e a tensão de escoamento do aço, com as devidas ponderações, foram de 23.460 MPa e 220.1 MPa.

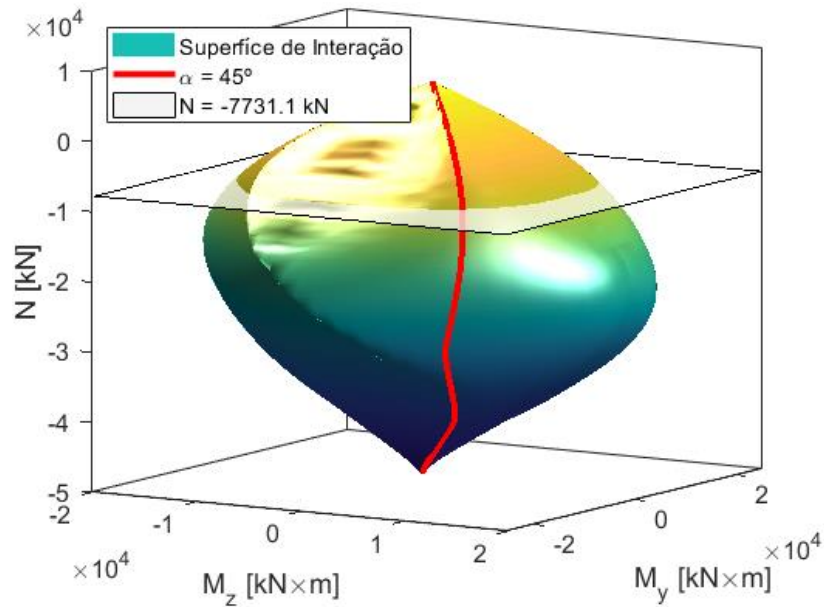
Em relação aos modelos constitutivos, algumas mudanças foram feitas, de início o modelo constitutivo adotado para a compressão do concreto é o modelo de Hognestad (1951), porém a deformação última do concreto foi modificada de 3,5 ‰ para 3 ‰ e o confinamento do concreto também foi estudado, sendo assim, o fator  $\gamma$  foi variado para dois valores: 0 e 0.30. A resistência à tração no concreto foi desconsiderada nesse exemplo. Para o modelo constitutivo do aço, utilizou-se a modelo da NBR 6118 (ABNT, 2014).

A modelagem da malha de triangulação foi efetuada com uma discretização de  $n_H = n_V = 20$ , o que corresponde a um total de 248 fibras triangulares. Os domínios de deformação foram modelados com 35 pontos e o incremento angular foi de 5°.



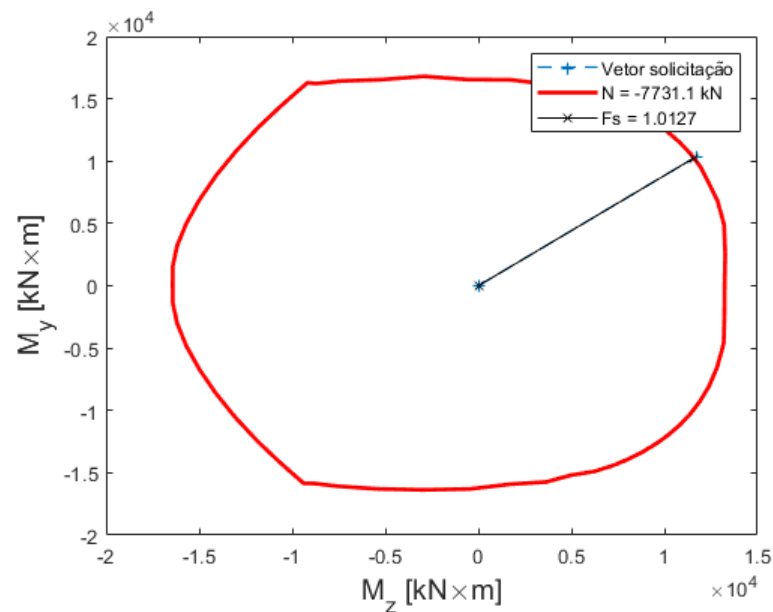
**Figura 61:** Seção transversal “Staircase” com discretização de 20 x 20.

Os valores extremos de compressão e tração centradas para a correspondente seção podem ser lidos na superfície de interação da Figura 62. Esses valores são de -49020 kN e 6881 kN, respectivamente.



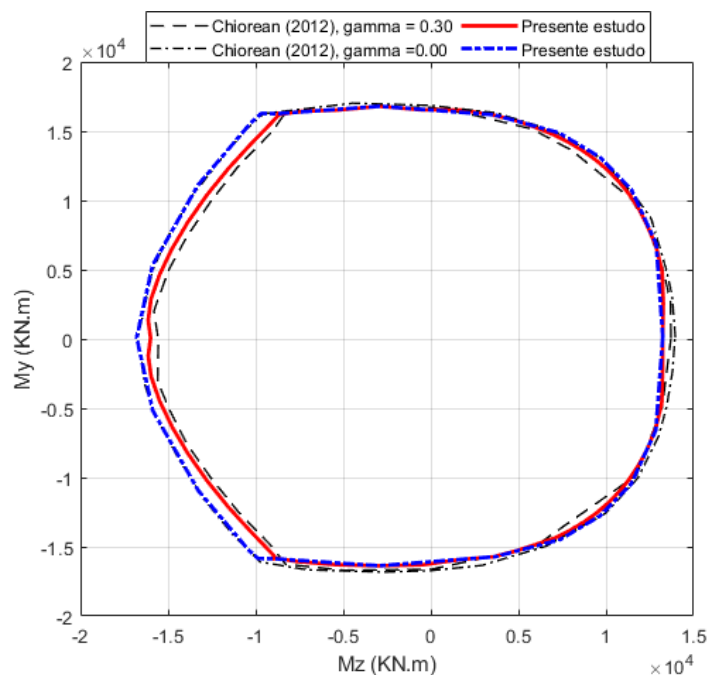
**Figura 62:** Superfície de interação correspondente à seção “Staircase”.

O fator de segurança, apresentado na Figura 63, para a seção em estudo foi de 1.0127, calculado considerando o fator  $\gamma$  de 0.30. Verifica-se que as armaduras adotadas para o dimensionamento da seção estão de acordo com as exigências dos esforços solicitantes.



**Figura 63:** Representação do fator de solicitação da seção “Staircase”.

Mais uma vez os resultados comparativos entre os diagramas de interação, mostrados na Figura 64, demonstram boa concordância com as respostas obtidas por outros autores.



**Figura 64:** Comparação dos diagramas de interação variando o coeficiente  $\gamma$  de confinamento para a seção “Staircase”.

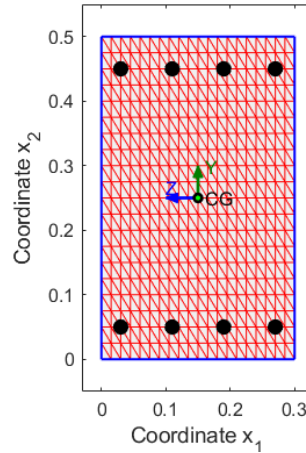
### 5.3 – Relação $M-\phi-N-\alpha$

Para o estudo da relação  $M-\phi-N-\alpha$  (Momento-Curvatura-Força Normal-Inclinação da Linha Neutra), foi utilizada a comparação entre os resultados produzidos por duas metodologias de cálculo distintas: uma analítica, baseada em fórmulas matemáticas para o cálculo da relação e outra baseada nos resultados do software comercial SAP2000™ (*Computer and Structures INC*, 2017). Além das relações entre momento *versus* curvatura e rigidez *versus* curvatura, o *RCSectionCode* também é capaz de reproduzir a relação de deformação de uma seção transversal, bem como o mapa de tensões sobre a mesma.

#### 5.3.1 – Seção retangular – Simão *et al.* (2016)

A relação de  $M-\phi-N-\alpha$  produzida para a seção transversal retangular estudada por Simão *et al.* (2016), mostrada na Figura 65, foi calculada analiticamente através de fórmulas matemáticas fechadas para cada seção. A seção consiste de 8 barras de 22 mm de diâmetro, divididas igualmente em 2 camadas, uma inferior e outra superior, a uma distância de 50 mm do centro da barra para as faces verticais e 30 mm para as faces horizontais. Os modelos constitutivos adotados para o concreto na compressão e para o aço são: modelo de Hognestad (1951) e o modelo elasto-plástico com deformação última no aço de 25%. A resistência à

compressão do concreto e a tensão de escoamento do aço são iguais a 30 MPa e 415 MPa, respectivamente. Os módulos de elasticidade do concreto e do aço são 30.672 GPa e 200 GPa.

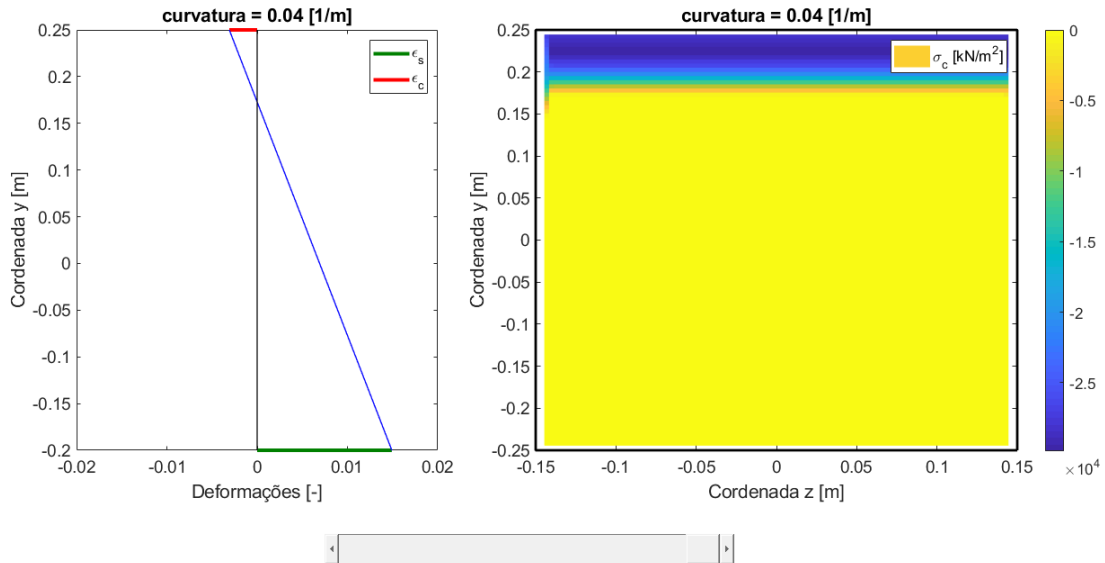


**Figura 65:** Seção retangular estudada por Simão *et al.* (2016).

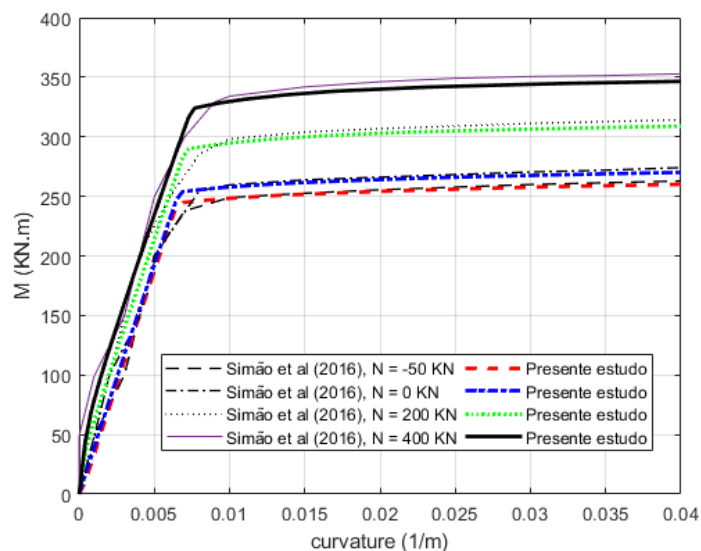
A discretização da seção foi de  $n_H = n_V = 20$  e o número de pontos para o traçado do diagrama de momento curvatura foi de 100. A simulação foi conduzida até a curvatura de 0,04 (1/m). Para essa seção, a influência da força axial foi estudada e os valores são de -400 kN e -200 kN para compressão e 50 kN para a tração. Também foi comparada a resposta da seção à flexão pura.

A Figura 66 ilustra essas informações para a seção retangular em estudo, pode-se notar que para a curvatura de 0,04 (1/m) a deformação no concreto é de 3,085‰ e nas armaduras é de 14,92‰. Há a possibilidade de consultar outros valores do perfil deformações movimentando a barra de seleção na parte inferior da Figura 66.

Os resultados produzidos pelo *RCSectionCode* se ajustam razoavelmente bem àqueles produzidos por Simão *et al.* (2016), Figura 67, sendo as diferenças mais notáveis presentes nos momentos de escoamento, uma vez que a interpolação utilizada por Simão *et al.* (2016) é feita com um polinômio de 8º grau, enquanto que no presente trabalho a interpolação é linear.



**Figura 66:** Perfil de tensão deformação da seção retangular em flexão pura.

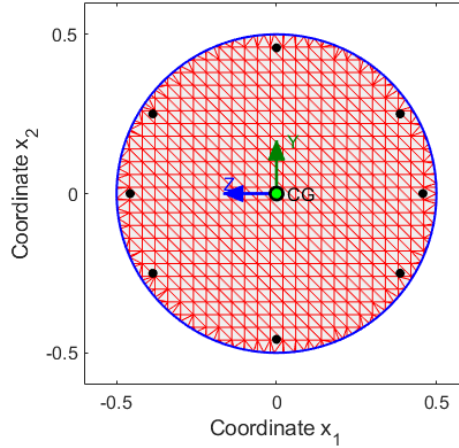


**Figura 67:** Comparação entre os diagramas de momento-curvatura variando a força axial.

### 5.3.2 – Seção Circular

A presente seção transversal circular, mostrada na Figura 68, é uma proposição do autor deste trabalho. Ela consiste em um diâmetro de 1000 mm e 8 barras de 25 mm de diâmetro, distribuídas com um afastamento de 30 mm das faces. O momento curvatura foi calculado em 2 situações que contemplam a influência da força axial e comparado com o *software* comercial SAP2000™. A resistência à compressão do concreto assumida foi de 31.980 MPa e o módulo de elasticidade adotado foi de 31.669 GPa. O modelo constitutivo uniaxial de compressão foi o proposto por Saenz (1964). Em relação à tração do concreto, adotou-se o modelo constitutivo

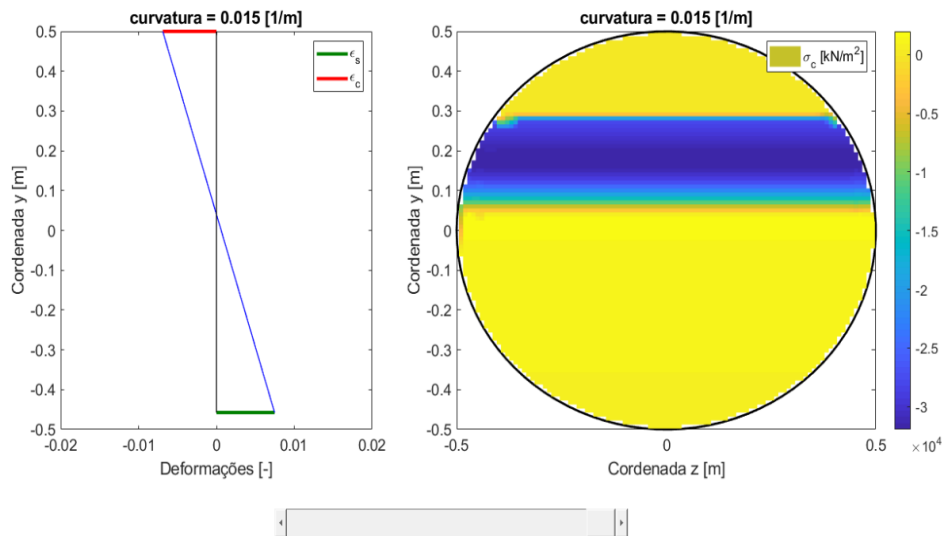
de Vecchio e Collins (1986), com uma tensão resistente de tração de 2.510 MPa. Para o aço das armaduras com 500 MPa de tensão de escoamento e 200 GPa de módulo de elasticidade, empregou-se o modelo constitutivo elastoplástico perfeito com deformação última de 25%.



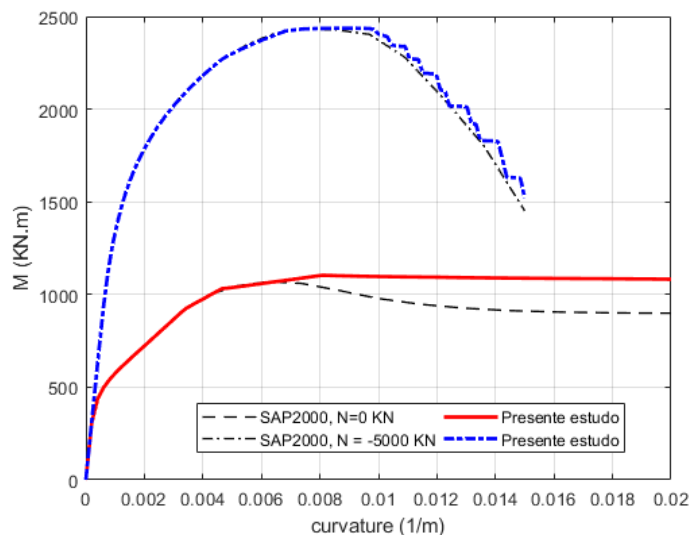
**Figura 68:** Seção circular proposta neste trabalho.

A seção circular foi discretizada com uma malha de  $n_H = n_V = 25$  e o traçado do momento curvatura foi feito com 100 pontos para ambos os testes. Para a flexão pura, a curvatura máxima do diagrama foi de 0.02 (1/m), já para o esforço normal de -5000 kN na compressão, o diagrama foi calculado até a curvatura de 0.015 (1/m). A Figura 69 apresenta o perfil de deformações da seção circular para o último ponto de curvatura.

A comparação dos resultados apresentada na Figura 70 mostra boa concordância entre os programas, salvo a divergência de resultados a partir da curvatura de 0.07 (1/m) na flexão simples, onde se verifica uma divergência após a seção atingir o momento de escoamento das armaduras, isso pode ser explicado pelas diferentes considerações de cálculo entre os programas comparados.



**Figura 69:** Perfil de deformações e tensões da seção circular proposta.



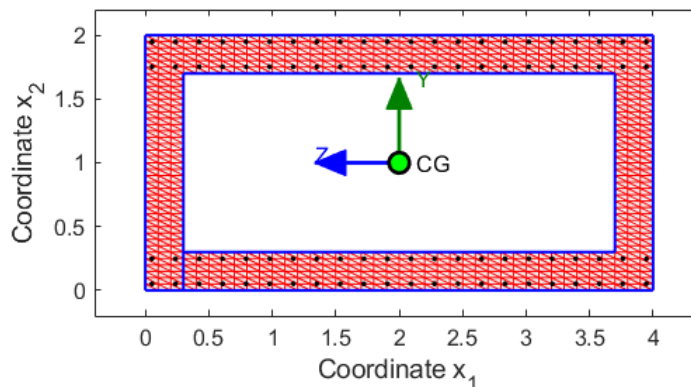
**Figura 70:** Comparação das relações momento-curvatura obtidas a partir da ferramenta *RCSectionCode* e do SAP2000™ variando a força axial.

### 5.3.3 – Seção AASTHO retangular vazada

A seção transversal vazada, mostrada na Figura 71, é uma proposição do manual da AASTHO (2011) e consiste em 4 camadas de 23 barras, espaçadas igualmente, de 30 mm de diâmetro cada. A resistência à compressão do concreto é de 32 MPa e a resistência à tração corresponde a 2.5 MPa; os modelos constitutivos utilizados foram o de Hognestad (1951) e Vecchio e Collins (1986), consultar Anexo 1, e o módulo de elasticidade do concreto é igual a 31.678 GPa. Para a modelagem do aço das armaduras, o modelo constitutivo adotado foi o da

NBR 6118 (ABNT, 2014) com uma tensão de escoamento igual a 500 MPa e um módulo de 210 GPa.

Os testes foram realizados para verificar a influência da tensão axial e a variação do ângulo de incidência do esforço axial. Os resultados foram comparados com os valores produzidos pelo software SAP2000™.

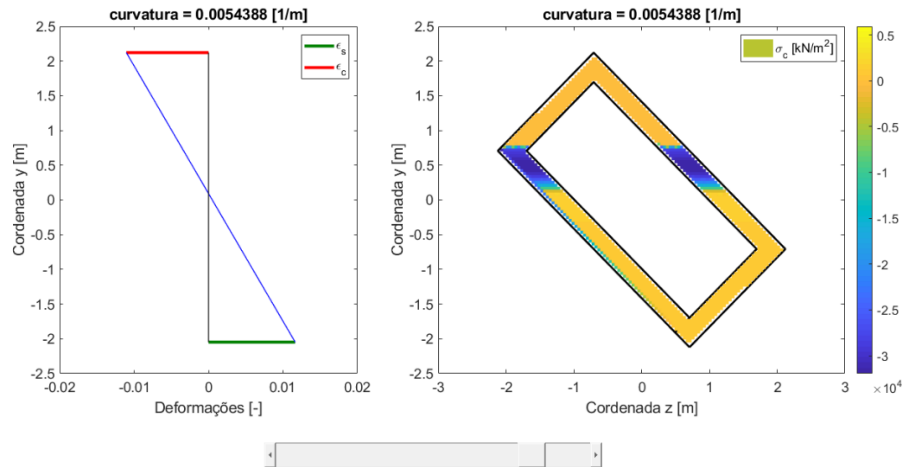


**Figura 71:** Seção transversal vazada proposta pela AASTHO (2011).

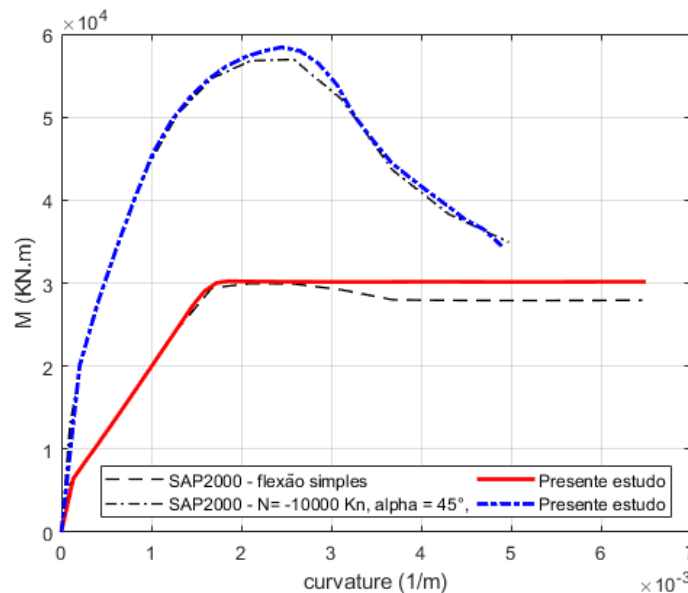
A triangulação de Delaunay foi efetuada com uma malha de  $n_H = n_V = 40$  e o traçado do diagrama de momento-curvatura foi composto por 50 pontos em ambos os testes. As curvaturas máximas conduzidas nos testes foram de 0.05 (1/m) e 0.065 (1/m), para o esforço de compressão de -10000 kN, para um ângulo de  $\alpha = 45^\circ$  de inclinação da linha neutra. Também foi considerada a condição de flexão simples, para  $\alpha = 0^\circ$ . Somente para fins de exemplo, a Figura 72 mostra o perfil de deformações e tensões no concreto no último ponto de curvatura, para o caso com axial de -10000 kN atuando em um ângulo de  $45^\circ$ .

A Figura 73 apresenta a comparação dos resultados entre os programas, na análise do ângulo de inclinação da linha neutra. Pode-se constatar que os resultados estão em conformidade. Porém, os resultados para a flexão simples apresentam alguma divergência em estágios avançados de curvatura, o que é aceitável, dada a natureza distintas entre os métodos numéricos de solução das equações não lineares adotados pelos dois programas.





**Figura 72:** Perfil de deformações na seção vazada no ângulo  $\alpha = 45^\circ$  e  $N = -10000$  kN.



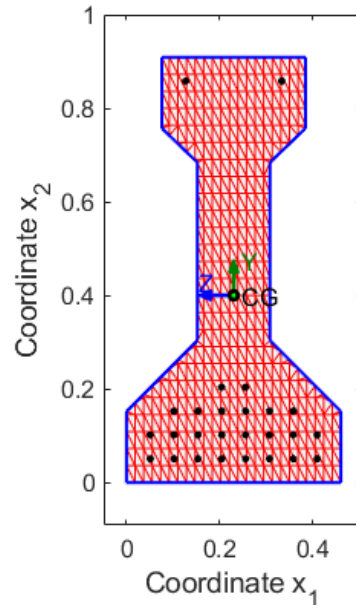
**Figura 73:** Comparação entre os diagramas de momento-curvatura obtida para diferentes forças axiais e ângulos de inclinação da linha neutra.

#### 5.3.4 – Seção AASTHO em I

A seção transversal em I, mostrada na Figura 74, também é uma proposição da AASTHO (2011), que consiste em uma peça com 5 camadas de barras de 12,8 mm de diâmetro. A altura da seção é de 910 mm e a largura é de 460 mm. Na modelagem do concreto, a resistência à compressão de 50.853 MPa e módulo de elasticidade de 39.93 GPa foram utilizados juntamente com o modelo constitutivo de Hognestad (1951) com coeficiente  $\gamma$  de confinamento do concreto em 0.15. A resistência à tração do concreto foi desconsiderada neste exemplo. Para a representação da armadura de aço, o modelo constitutivo da NBR 6118

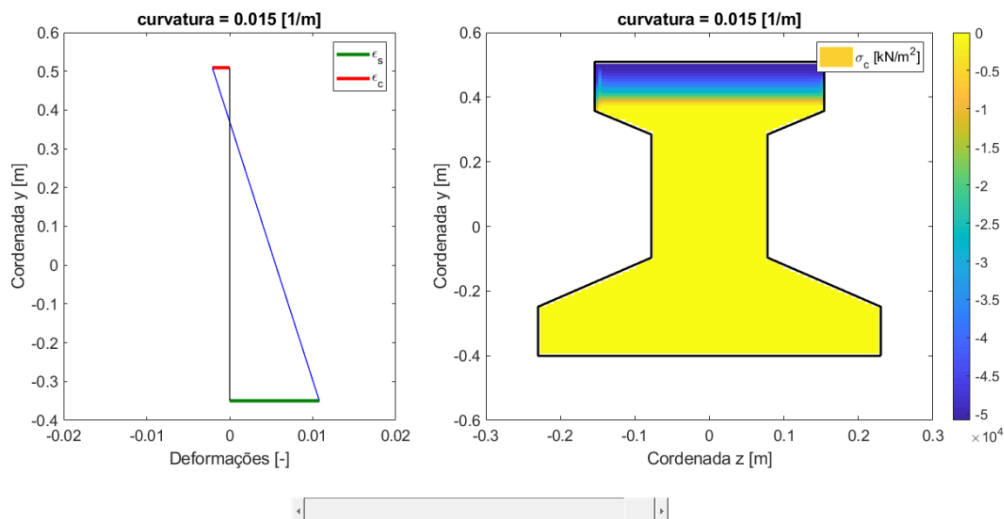
(ABNT, 2014) foi utilizado, com tensão de escoamento de 500 MPa e módulo de elasticidade de 210 GPa.

Para esta seção, os testes foram conduzidos de forma a avaliar a influência do ângulo de inclinação da linha neutra na flexão simples da seção. Também foram comparados com os resultados produzidos pelo SAP2000™.

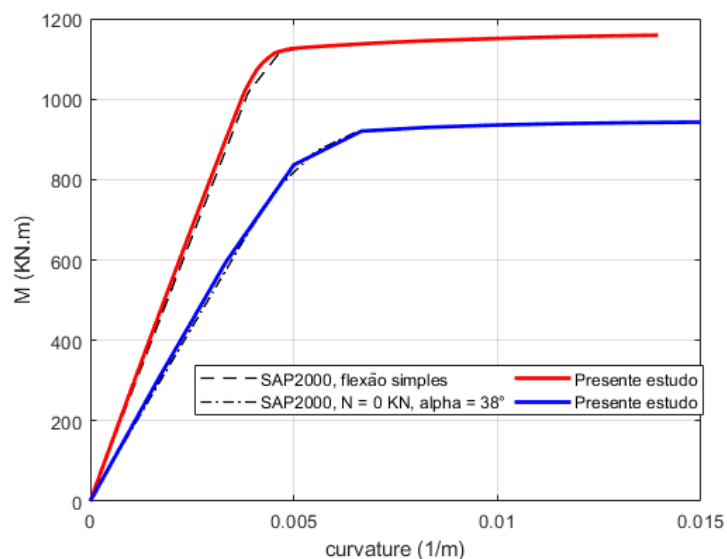


**Figura 74:** Seção em I proposta pela AASTHO (2011).

A malha de discretização da seção I foi de  $n_H = n_V = 25$  e a quantidade de pontos para o traçado do diagrama de momento curvatura foi de 100. Os testes foram conduzidos até as curvaturas de 0.014 (1/m) e 0.015 (1/m) nos casos de flexão simples com  $\alpha = 0^\circ$  e flexão simples com  $\alpha = 38^\circ$ , respectivamente. As deformações no concreto e no aço foram de 2.094‰ e 10.79‰ na curvatura de 0.015 (1/m) para o caso de flexão simples com  $\alpha = 0^\circ$ , conforme mostra a Figura 75. Pode-se constatar, a partir da Figura 76, que os resultados são praticamente coincidentes entre os programas.



**Figura 75:** Diagrama de deformações para a seção I em flexão simples.



**Figura 76:** Comparação entre os diagramas de momento-curvatura obtida para flexão simples com diferentes ângulos de inclinação da linha neutra.

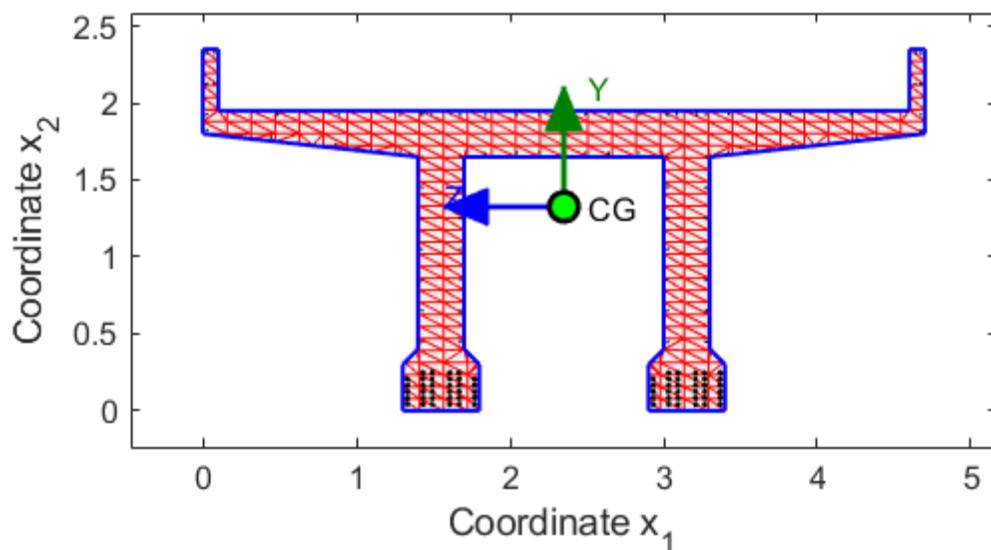
### 5.3.5 – Seção da ponte do Suaçuí

A seção da Figura 77, foi estudada por Bittencourt *et al.* (2011), e representa uma seção da ponte ferroviária sobre o rio Suaçuí, localizada na Estrada de Ferro Vitória-Minas, no estado de Minas Gerais. Como esta seção possui muitos detalhes de geometria e armadura, esses dados podem estar melhores esclarecidos no Anexo 3.

Para a modelagem da seção, os modelos constitutivos de Hognestad (1951),  $\gamma$  igual a 0.15, para o concreto em compressão, e o modelo de Vecchio e Collins (1986), para o concreto em tração, juntamente com o modelo elastoplástico perfeito para as armaduras, foram adotados. A

resistência à compressão e à tração do concreto são, respectivamente, 31.98 MPa e 2.500 MPa. Já a tensão de escoamento do aço é de 500 MPa. O módulo de elasticidade do concreto é de 31.669 GPa, enquanto que o do aço é de 210 GPa.

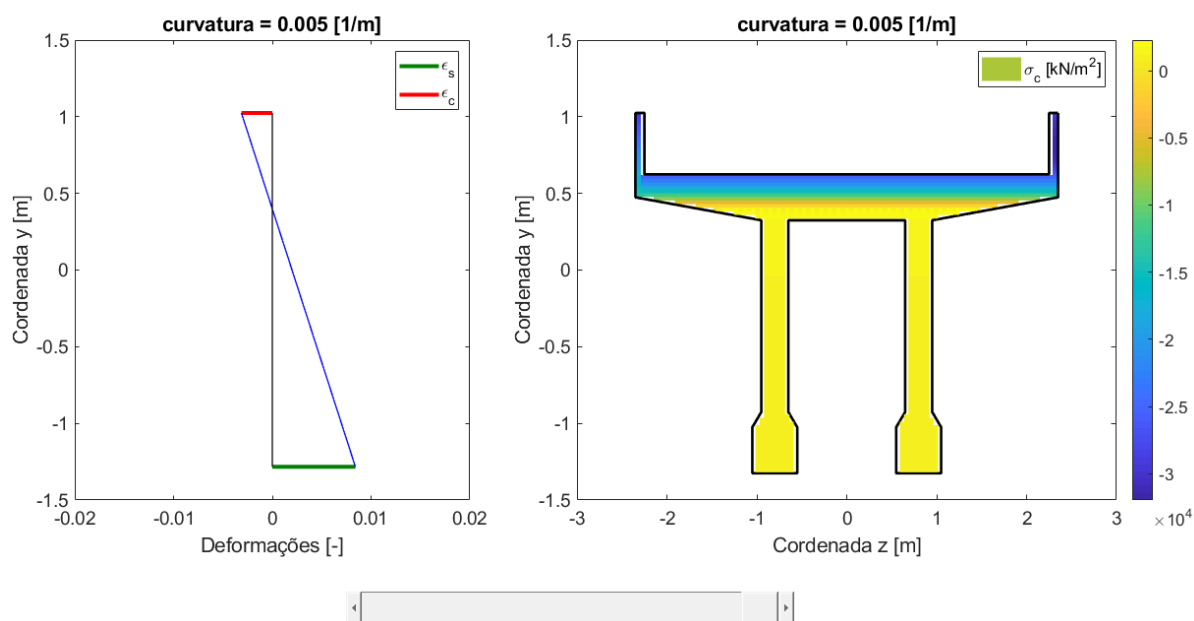
Para a modelagem da seção da ponte, a malha de triangulação adotada foi de  $n_H = n_V = 30$  e o traçado da relação momento-curvatura foi realizado com 100 pontos. A curvatura máxima testada foi de 0.05 (1/m) e a Figura 78 mostra o perfil de deformações da seção no último ponto de curvatura testado, onde a deformação máxima nas fibras de concreto foi de -3.12‰ e nas barras de aço a máxima deformação foi de 8.41‰



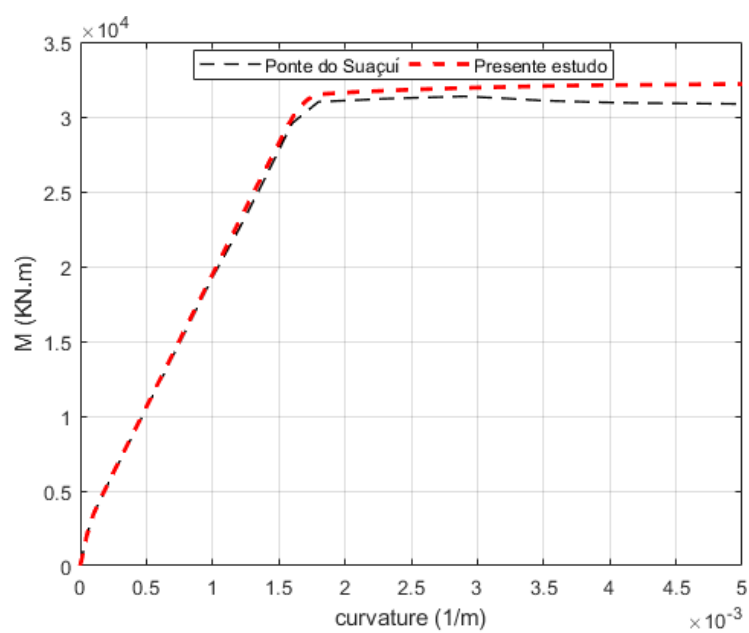
**Figura 77:** Seção transversal da ponte do Suaçuí estudada por Bittencourt *et al.* (2011).

Como pode ser notado na Figura 79, os resultados são próximos até alcançarem a curvatura de 0.003 (1/m), a qual corresponde ao momento de escoamento da seção, essa divergência gera um erro relativo entre os resultados na média de 4.6% para os momentos associados às curvaturas após o escoamento.

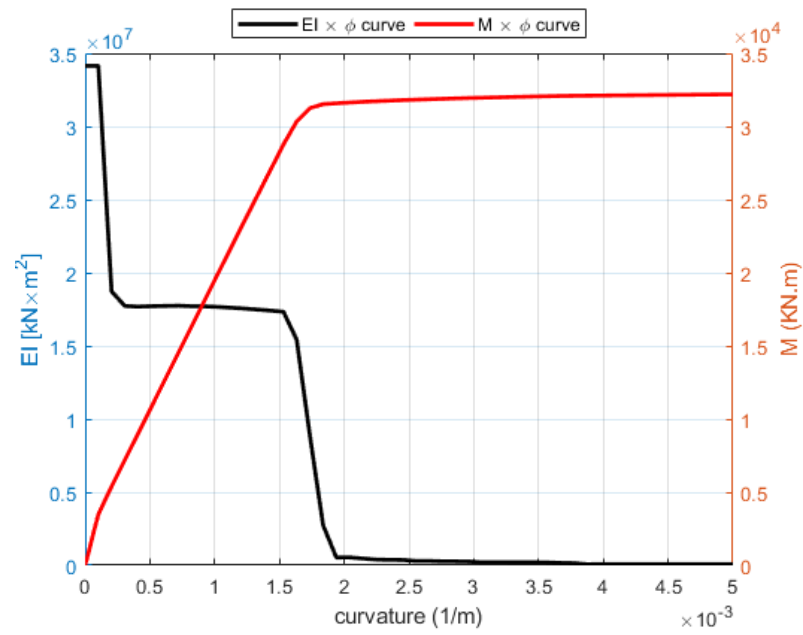
A Figura 80 mostra a evolução da rigidez à flexão (EI) com relação à curvatura e ao momento. Tais curvas são obtidas a partir da diferenciação numérica da relação momento-curvatura, conforme descrito na seção 4.4.



**Figura 78:** Perfil de deformações para a curvatura de 0.005 (1/m) da Ponte do Suaçuí.



**Figura 79:** Diagrama comparativo do momento-curvatura para a seção da ponte sobre o rio Suaçuí.



**Figura 80:** Evolução da rigidez axial e do momento em relação à curvatura da seção.

## 6 – ANÁLISE PARAMÉTRICA

No transcorrer da validação da base de dados experimentais, Tabela 6, uma análise paramétrica foi conduzida para identificar as variáveis, as quais o usuário tem a possibilidade de alterar, que são predominantes na resposta do programa, e podem direcionar de forma mais rápida uma análise. Sendo assim, tendo como base a convergência com o erro relativo, o usuário pode obter o resultado mais preciso com o mínimo possível de tentativas de modelagem.

As variáveis que foram estudadas nos diagramas de interação são: o número de pontos da malha de discretização da triangulação de Delaunay na seção transversal,  $n_{pt}$ , o valor de incremento da linha neutra,  $\Delta\alpha$ , a quantidade de pontos total nos domínios de deformação  $n_{pd}$  e o tempo de processamento. Aproveitando os ensaios experimentais apresentados na Tabela 6 e calculando o erro relativo pela equação (7.1) a seguir.

$$e(\%) = \frac{|M_{RCSC} - M_{exp}|}{M_{exp}} \cdot 100\% \quad (\text{Equação 7.1})$$

Onde:

$M_{RCSC}$  é o momento fletor resultante calculado pelo programa *RCSectionCode*;

$M_{exp}$  é o momento fletor experimental.

Na avaliação estatística de cada parâmetro, estudou-se a influência de cada parâmetro supracitado nos valores médios do erro relativo  $M(er)$  e do tempo de processamento  $M(tp)$ , bem como nos respectivos desvios padrões,  $\sigma(er)$  e  $\sigma(tp)$ .

Da Tabela 9, verifica-se a influência da triangulação de Delaunay e é possível notar que quanto maior a discretização da seção em fibras triangulares melhor é o resultado, porém o tempo de processamento aumenta proporcionalmente. Pode-se observar que para triangulações entre 200 e 400 fibras triangulares a redução do erro é mínima, sendo esse intervalo uma boa estimativa da convergência quanto à triangulação de Delaunay.

Quanto à influência da discretização da linha neutra ( $\Delta\alpha$ ) no erro relativo e no tempo de processamento, Tabela 10, observa-se que a discretização da linha neutra que minimiza o erro relativo é a partir de  $10^\circ$ , nas quais as médias dos erros são de 2.691% e 2.565%, porém, verificou-se a mesma tendência da apresentada na Tabela 9, quanto ao tempo de processamento, aumentando à medida que a discretização da linha neutra também aumenta.

**Tabela 9:** Influência na variação da triangulação de Delaunay no erro relativo ( $er$ ) e no tempo de processamento ( $tp$ ), para  $\Delta\alpha = 30^\circ$  e  $n_{pd} = 35$  pontos em cada domínio.

Variação da triangulação	50 f.t	128 f.t	200 f.t	400 f.t
$M(er)$	4.365	3.842	3.519	3.504
$\sigma(er)$	1.91	1.773	1.770	1.767
$M(tp)$	5.130	6.576	7.900	12.042
$\sigma(tp)$	0.413	0.725	1.010	1.457

**Fonte:** Autor, 2021.

**Tabela 10:** Influência na variação da discretização da linha neutra no erro relativo ( $er$ ) e no tempo de processamento ( $tp$ ), para  $n_{pt} = 50$  fibras triangulares e  $n_{pd} = 35$  pontos em cada domínio.

Variação da discretização da linha neutra	30°	20°	10°	5°
$M(er)$	4.169	2.982	2.691	2.565
$\sigma(er)$	1.91	2.014	1.925	1.823
$M(tp)$	5.111	5.687	6.845	9.760
$\sigma(tp)$	0.430	0.687	0.343	0.458

**Fonte:** Autor, 2021.

E por último, na análise da quantidade de pontos em cada domínio, mostrada na Tabela 11, verificou-se uma convergência de resultados para valores acima de 70 pontos por domínio. Não obstante, o tempo de processamento sofre aumento, mas não tão grande como na triangulação e no incremento da linha neutra.

Contudo, conclui-se que para o início de uma análise de diagramas de interação na flexão composta oblíqua com o *RCSectionCode*, a variação dos parâmetros que oferecem os menores erros são, em ordem: o incremento angular da linha neutra, a discretização em triângulos e a quantidade de pontos em cada domínio de deformação.

Em vista disso, sugere-se ao usuário que busque trabalhar com discretizações triangulares maiores que 200 fibras, um incremento de linha neutra a partir de  $10^\circ$  e 50 pontos em cada domínio, mesmo que o tempo de processamento seja um pouco elevado com a combinação desses parâmetros. Eventualmente esses parâmetros também podem ser aumentados, dependendo dos critérios do usuário, porém, como observado por essa análise as taxas de convergência são menores.



**Tabela 11:** Influência na variação da quantidade de pontos em cada domínio de deformação no erro relativo ( $er$ ) e no tempo de processamento ( $tp$ ), para  $n_{pt} = 50$  fibras triangulares e  $\Delta\alpha = 30^\circ$ .

Variação dos pontos por domínio de deformação	35 p.p.d	50 p.p.d	70 p.p.d	100 p.p.d
$M(er)$	4.261	3.927	3.872	3.571
$\sigma(er)$	1.91	1.963	1.749	1.698
$M(tp)$	5.111	5.692	6.266	7.326
$\sigma(tp)$	0.561	1.648	0.307	0.700

**Fonte:** Autor, 2021.

## 7 – CONCLUSÃO E SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

O trabalho proposto apresentou o desenvolvimento de uma ferramenta numérica gerada para o estudo e avaliação de seções transversais submetidas à flexão composta oblíqua com formas arbitrárias, incluindo vazios e posições arbitrárias das armaduras, e modelos constitutivos que contemplam a não linearidade dos materiais. Trata-se de um programa numérico que realiza análises de estado limite último, no qual é possível obter a envoltória de momentos fletores resistentes da seção, e análise de Momento-Curvatura-Normal, em que se obtém esta relação para um dado ângulo de rotação da seção transversal (inclinação da linha neutra). A ferramenta aplica o método de triangulação de Delaunay para discretização de poligonais e integração dos campos de tensões no concreto das seções transversais.

A visualização da superfície de resistência de modo tridimensional, aliada com os correspondentes traçados dos diagramas de interação nos planos  $N-M_y$ ,  $N-M_z$  e  $M_z-M_y$ , são comuns como objeto de verificação de projetos à flexão composta oblíqua. O processo de cálculo dessas superfícies e curvas engloba conceitos relativos a domínios de deformações em ELU e comportamento dos materiais, bem como os conceitos de deformada da seção.

A utilização das variáveis  $\alpha$  e  $D$  para a descrição das deformadas em ELU, permitem a formulação mais simples do problema, facilitando a criação das superfícies resistentes e dos diagramas de interação.

No transcorrer do trabalho, os resultados obtidos com a ferramenta desenvolvida foram satisfatórios, tanto no traçado dos diagramas de interação  $N-M_z-M_y$ , quanto na convergência via banco de dados. Fica a ressalva que, em poucos casos as comparações mostraram incongruências significativas, provavelmente no ajuste inapropriado dos parâmetros de convergência e precisão.

Quanto à análise numérica, os diagramas da relação  $M-\phi-N-\alpha$  apresentaram boas concordâncias com os valores comparados, salvo algumas divergências após o escoamento das armaduras, especialmente em comparação com o *software* comercial SAP2000™. A utilização do método de Newton-Raphson para a resolução dos sistemas não lineares se mostrou vantajosa, uma vez que a convergência do método é quadrática e o tempo de processamento é reduzido.

Outro fator relevante no desenvolvimento deste trabalho foi a flexibilização da entrada de modelos constitutivos para os materiais em estudo, uma vez que a maioria dos programas se atém a modelos normativos e no programa apresentado o usuário pode tanto escolher os modelos padrões inseridos quanto atualizar a biblioteca de modelos constitutivos caso queira um modelo diferente. As relações de tensão-deformação implementadas permitem análises para

concretos com tensão de compressão até 120 MPa, bem como contemplam situações de “amolecimento” do concreto, e os modelos de tração contemplam situações de análise no surgimento da primeira fissura ou até atenção máxima de tração, caso dos modelos de Vecchio e Collins (1986) e Carreira e Chu (1986). Do mesmo modo, os modelos constitutivos para o aço representam códigos normativos, mas também modelos que tratam do comportamento de encruamento do aço, seja de forma linear ou parabólica.

Por conseguinte, as rotinas desenvolvidas no escopo deste trabalho têm foco na verificação de seções submetidas à flexão composta oblíqua. No entanto, as mesmas podem ser utilizadas em outras situações. Por exemplo, a rotina de verificação de ELU pode permitir a elaboração de uma rotina de dimensionamento – propondo uma seção com armadura e aumentando ou diminuindo a armadura cada vez que os momentos resistentes não atenderem os momentos de cálculo ou a questões de economia de materiais. A rotina de momento-curvatura pode ser utilizada para o cálculo do diagrama de carga-deslocamento de membros submetidos às solicitações normais (flexão simples, composta reta e composta oblíqua), uma vez que extrai as rigidezes flexionais e axiais da seção transversal.

Além da contribuição das rotinas, o programa *RCSectionCode* fica disponível em plataforma MATLAB™ para o cálculo de envoltórias de momentos resistentes em relação a um esforço axial constante no estado limite último, para o cálculo das relações de momento-normal-curvatura da seção, bem como a apresentação de relatórios em arquivos de texto com os dados advindos dessas análises.

## **7.1 – Sugestão para trabalhos futuros**

Durante o desenvolvimento do trabalho, alguns pontos nas rotinas e no programa foram observados como sendo passíveis de atualização para melhorar a interação com o usuário. Todas essas sugestões estão discriminadas a seguir, com sugestões para elaboração e detalhes úteis para trabalhos futuros:

- Expandir a biblioteca de modelos constitutivos: a expansão dos modelos constitutivos sempre foi um foco do programa, sendo assim, para os próximos trabalhos a implementação de módulos que contemplem situações como concretos reforçados com fibras de aço, concretos de alta resistência e modelos que considerem a contribuição do confinamento do concreto;

- Implementar código para a análise de seções compostas, como reforçada com fibras de carbono e seções de aço dentro do concreto: esse módulo seria de grande valia para a expansão do programa na direção de análise de reforços de estruturas;

- Implementar código para a avaliação do concreto protendido: a criação de uma rotina que analise seções protendidas é de fundamental importância para a disseminação do programa, uma vez que a protensão é muito difundida no mercado da construção civil;

- Introduzir a análise em ELS: uma análise em estado limite de serviço é útil para criação do módulo de dimensionamento de seções e por contemplar situações limites como abertura de fissuras e estados de descompressão, no caso de concretos protendidos;

- Implementar um módulo de otimização de distribuição da área de armadura em relação aos diagramas de interação e ao momento curvatura: este módulo seria importante para o posicionamento racional de armaduras em peças com geometrias não convencionais, tais como seções em G ou U;

- Realizar análise de confiabilidade de seções submetidas à flexão composta oblíqua: ao analisar uma seção à flexão composta oblíqua é importante prever a confiabilidade que a mesma confere, em termos de avaliação do risco, dadas as variabilidades e incertezas inerentes ao problema;

- Implementar código para a construção da relação carga-deslocamento baseado na integração das curvaturas ou em uma formulação de elementos finitos de pórtico espacial onde a matriz de rigidez dos elementos é obtida a partir das matrizes de rigidez das seções transversais: esta implementação seria importante para avaliações da não linearidade física no nível da estrutura;

- Considerar efeitos como o escorregamento da armadura, fluência e retração do concreto;

- Generalizar a formulação para incluir as deformações por cisalhamento;

- Desenvolver uma interface gráfica mais amigável para o usuário, tanto no módulo de pré-processamento quanto no de pós-processamento: é importante tornar a entrada de dados e a visualização de resultados mais intuitivas quanto possível. A plataforma MATLAB™ possui boas ferramentas para o desenvolvimento de uma futura interface;

- Implementar módulo com seções transversais pré-definidas, tais como retangular, quadrada, circular e vazada, de forma parametrizada, deixando para seções com geometrias mais complexas o módulo de inserção geométrica generalizada.

## BIBLIOGRAFIA

AASHTTO. **Manual for Bridge Evaluation**. American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: projeto de estruturas de concreto - procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ACI COMMITTEE 318, “**Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary**,” American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2019, 473 pp.

ANWAR, Naveed; NAJAM, Fawad Ahmed. **Structural Cross Sections: Analysis and Design**. [S. l.: s. n.]. *E-book*.

BITTENCOURT, T. N.; COLOMBO, A. B.; CONCEIÇÃO NETO, A. P.; TEIXEIRA, R. M.; MACHADO, E. **Análise dos resultados do Monitoramento da Ponte de Concreto Armado sobre o Rio Suaçuí: relatório**. São Paulo: USP, 2011.

BRECCOLOTTI, Marco; MATERAZZI, Annibale Luigi; REGNICOLI BENITEZ, Bruno. **Curvature ductility of biaxially loaded reinforced concrete short columns**. Engineering Structures, [S. l.], v. 200, n. May, p. 109669, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109669>

BRESLER, By Boris. **Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending**. ACI Journal Proceedings, [S. l.], v. 57, n. 11, p. 481–490, 1960. Disponível em: <https://doi.org/10.14359/8031>

CAMPIONE, Giuseppe *et al.* **Biaxial deformation and ductility domains for engineered rectangular RC cross-sections: A parametric study highlighting the positive roles of axial load, geometry and materials**. Engineering Structures, [S. l.], v. 107, p. 116–134, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.10.030>

CARREIRA, Domingo J.; CHU, Kuang Han. **Stress-Strain Relationship for Reinforced Concrete in Tension**. Journal of the American Concrete Institute, [S. l.], v. 83, n. 1, p. 21–28, 1986.

CHAI, Y. H; PRISTLEY, N.M.J; SEIBLE, F. (1991). **Structural Systems Flexural Retrofit of Circular Reinforced Concrete Bridge Columns**. [S. l.], [s. d.].

CHIOREAN, C. G. **A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel-concrete frame structures**. Engineering Structures, [S. l.], v. 57, p. 125–152, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.09.025>

COLLINS, M.P. (2001). **Evaluation of shear design procedures for concrete structures**. A Report prepared for the CSA technical committee on reinforced concrete design.

DE BERG, Mark *et al.* **Computational Geometry**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. *E-book*. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-77974-2>

DELAUNAY B.N., **Sur la sphère vide.** Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk, 1934, 7:793–800.

DI LUDOVICO, Marco *et al.* **Nonlinear analysis of cross sections under axial load and biaxial bending.** ACI Structural Journal, [S. l.], v. 107, n. 4, p. 390–399, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.14359/51663811>

EN 1992-1-1, **“Eurocode 2: Design of Concrete Structures Part 1-1: General—Common Rules for Building and Civil Engineering Structures,”** European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2004, 222 pp.

EN 1998-1, **“Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings,”** European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2005, 230 pp.

FOROUGHİ, Saeid; YÜKSEL, Süleyman. **Investigation of the Moment–Curvature Relationship for Reinforced Concrete Square Columns.** Turkish Journal of Engineering, [S. l.], n. January, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.31127/tuje.571598>

HSU, Cheng Tzu Thomas. **Analysis and Design of Square and Rectangular Columns By Equation of Failure Surface.** ACI Structural Journal, [S. l.], v. 85, n. 2, p. 167–179, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.14359/2730>

HOGNESTAD, E. **A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members.** ENGINEERING EXPERIMENT STATION, Illinois, v. 49, 1951. ISSN 399.

JUNGES, Elisabeth. **Modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de pórticos tridimensionais de edifícios de concreto armado.** [S. l.], p. 302, 2016.

KARPENKO, Nikolay I. *et al.* **Incremental approach to the nonlinear analysis of reinforcement concrete with cracks at plane stress state.** Procedia Engineering, [S. l.], v.111, n. TFOCE, p.386–389,2015.

KIM, J. H. and LEE, H. S. (2017) **Reliability assessment of reinforced concrete rectangular columns subjected to biaxial bending using the load contour method,** *Engineering Structures*. Elsevier Ltd, 150, pp. 636–645. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.07.061.

MARÍN, J., **“Design Aids for L-Shaped Reinforced Concrete Columns,”** ACI JOURNAL, Proceedings V. 76, No. 11, Nov. 1979, pp. 1197-1216. **“Design Aids for L-Shaped Reinforced Concrete Columns,”** ACI JOURNAL, *Proceedings* V. 76, No. 11, Nov. 1979, pp. 1197-1216.

MATHWORKS. **MATLAB 7.6.0 – getting started guide.** , 2011. Natick, USA.

PALLARÉS, L.; M., P.; FERNÁNDEZ-PRADA. **A numerical method to design reinforced concrete sections subjected to axial forces and biaxial bending based on ultimate strain limits.** Engineering Structures, [S. l.], v. 31, n. 12, p. 3065–3071, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.08.006>

PAPANIKOLAOU, V. K. **Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load.** Computers and Structures, [S. l.], v. 98–99, p. 33–54, 2012. Disponível em:

<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.02.004>

RAMAMURTHY, L. N. **Investigation of the Ultimate Strength of Square and Rectangular Columns under Biaxially Eccentric Loads.** ACI Journal, [S. l.], v. 13, p. 263–298, 1966.

ROSATI, L.; MARMO, F.; SERPIERI, R. **Enhanced solution strategies for the ultimate strength analysis of composite steel-concrete sections subject to axial force and biaxial bending.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, [S. l.], v. 197, n. 9–12, p. 1033–1055, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.10.001>

SAENZ, LP. Discussion of 'Equation the stress-strain curve of concrete' by Desayi P and Krishnan S, ACI J 1964;61(9):1229-1235.

COMPUTERS AND STRUCTURES, INC. **Sap2000 advanced 15.0.1.** Berkeley: University of Avenue, 2017. (Software)

SIMÃO, Pedro Dias *et al.* **Closed-form moment-curvature relations for reinforced concrete cross sections under bending moment and axial force.** Engineering Structures, [S. l.], v. 129, p. 67–80, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.09.033>

SILVA, L.M. **Programa Computacional para análise e verificação de seções de concreto armado e protendido com flexão oblíqua composta.** UFSCar, [S. l.], v. 151, n. 2005, p. 10–17, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/3132847.3132886>

TEIXEIRA, R. M. **RCSectionCode: Reinforced Concrete Cross Section Analysis Code** (Version 1.0). Belém: Universidade Federal do Pará, 2017. (Software sem registro)

TAHERI, Ali; MOGHADAM, Abdolreza S.; TASNIMI, Abass Ali. **Critical factors in displacement ductility assessment of high-strength concrete columns.** International Journal of Advanced Structural Engineering, [S. l.], v. 9, n. 4, p. 325–340, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40091-017-0169-6>

VAZ RODRIGUES, R. **A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending.** Engineering Structures, [S. l.], v. 104, p. 1–17, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.09.016>

VECCHIO, F.J. e COLLINS, M.P. **The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subject to Shear.** ACI Journal, Vol. 83, Nº 2, 1986.

VINCIPROVA, Francesco; OLIVETO, Giuseppe. **Ultimate strength domain of reinforced concrete sections under biaxial bending and axial load.** ACI Structural Journal, [S. l.], v. 110, n. 1, p. 3–14, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.14359/51684324>

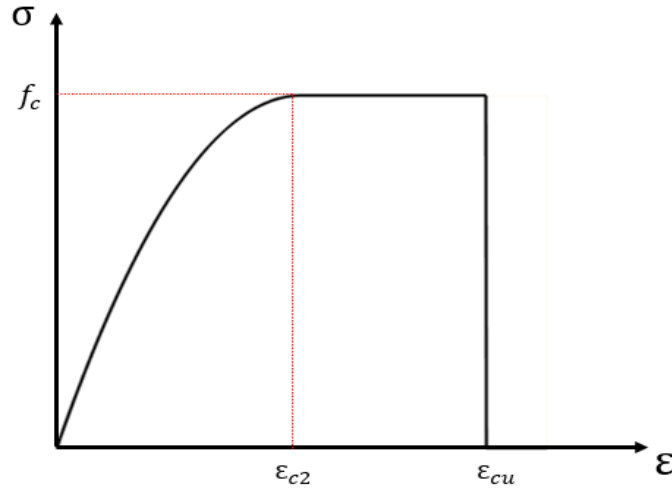
WERNER, H. **Schiefe Biegung Polygonal umrandeter Stahlbetoquerschnitte.** Beton - und Stahlbetonbau, 4, 1974.

WU, Binhua *et al.* **Probabilistic interval geometrically nonlinear analysis for structures.** Structural Safety, [S. l.], v. 65, p. 100–112, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2017.01.002>

## ANEXO 1 – MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS.

### MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO NA COMPRESSÃO.

1- NBR 6118 (ABNT,2014) e EN-02 (EN, 1992-1-1)



Se  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{c2}$

$$\sigma_c = f_c \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (\text{Equação A1.a})$$

Se  $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_{cu}$

$$\sigma_c = f_c \quad (\text{Equação A1.b})$$

Se  $\varepsilon_0 > \varepsilon_{cu}$

$$\sigma_c = 0 \quad (\text{Equação A1.c})$$

Sendo que:

$\varepsilon_0$ : deformação no concreto;  $\varepsilon_{c2}$ : deformação específica de encurtamento no início do patamar plástico;  $\varepsilon_{cu}$ : deformação específica de encurtamento na ruptura;  $\sigma_c$ : tensão no concreto;  $f_c$ : resistência à compressão de cálculo. E para concretos com resistência à compressão menores que 50 MPa os seguintes valores podem ser adotados:  $n = 2$ ;  $\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$ ;  $\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$ . Porém, para valores além de 50 MPa e menores que 90 MPa, as seguintes equações são adotadas:

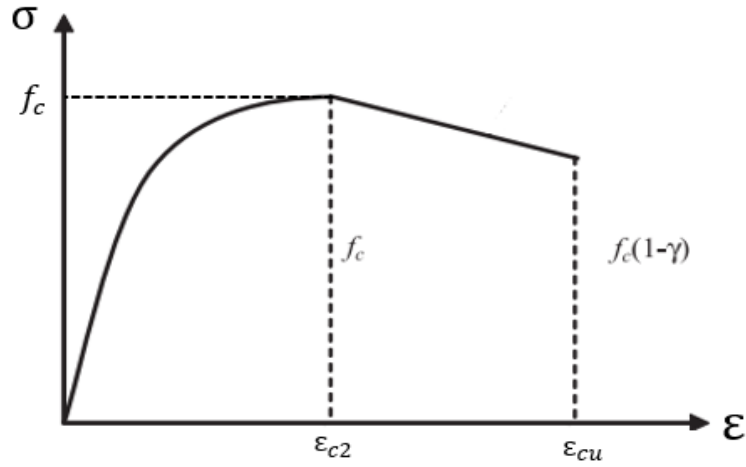
$$n = 1,4 + 23,4 \left[ (90 - f_c) / 100 \right]^4 \quad (\text{Equação A1.d})$$

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰} + 0,085\text{‰} * (f_c - 50)^{0,53} \quad (\text{Equação A1.e})$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 3,5\text{‰} \left[ (90 - f_c) / 100 \right]^4 \quad (\text{Equação A1.f})$$



## 2- Parábola de Hognestad (1951)



Se  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{c2}$

$$\sigma_c = f_c \cdot \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad (\text{Equação A2.a})$$

Se  $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_{cu}$

$$\sigma_c = f_c \cdot \left[ 1 - \gamma \left( \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}} \right) \right] \quad (\text{Equação A2.b})$$

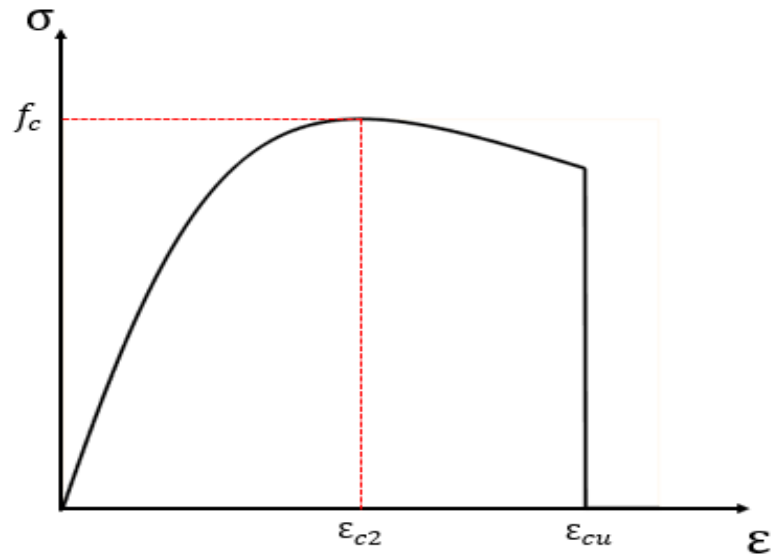
Se  $\varepsilon_0 > \varepsilon_{cu}$

$$\sigma_c = 0 \quad (\text{Equação A2.c})$$

Onde:

$\varepsilon_0$  : deformação no concreto;  $\varepsilon_{c2}$  : deformação específica de encurtamento no início do patamar plástico;  $\varepsilon_{cu}$  : deformação específica de encurtamento na ruptura;  $\sigma_c$  : tensão no concreto;  $f_c$  : resistência à compressão de cálculo.  $\gamma$  : coeficiente que representa o confinamento do concreto pode assumir os seguintes valores: 0; 0,15; 0,50.

3– Saenz (1964)



Se  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{cu}$

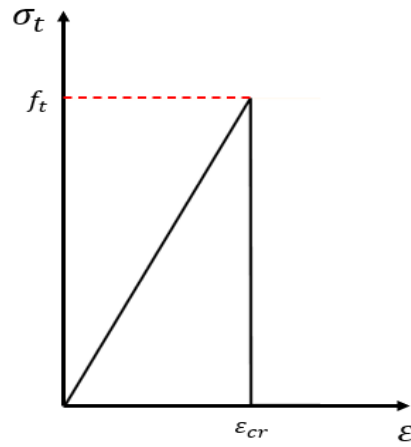
$$\sigma_c = \frac{E \cdot \varepsilon_0}{\left( 1 + \left[ \left( \frac{E \cdot \varepsilon_0}{f_c} - 2 \right) * \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \right) \right] + \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right)} \quad (\text{Equação A.3})$$

Onde:

$\varepsilon_0$  : deformação no concreto;  $\varepsilon_{c2}$  : deformação específica de encurtamento no início do patamar plástico;  $\varepsilon_{cu}$  : deformação específica de encurtamento na ruptura;  $\sigma_c$  : tensão no concreto;  $f_c$  : resistência à compressão de cálculo. E: módulo de elasticidade tangente do concreto.

## MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO NA TRAÇÃO.

### 1 – Modelo linear de tração



$$\text{Se } \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{cr} = \frac{f_{ct}}{E}$$

$$\sigma_t = E \cdot \varepsilon_0$$

(Equação B1.a)

$$\text{Se } \varepsilon_0 > \varepsilon_{cr}$$

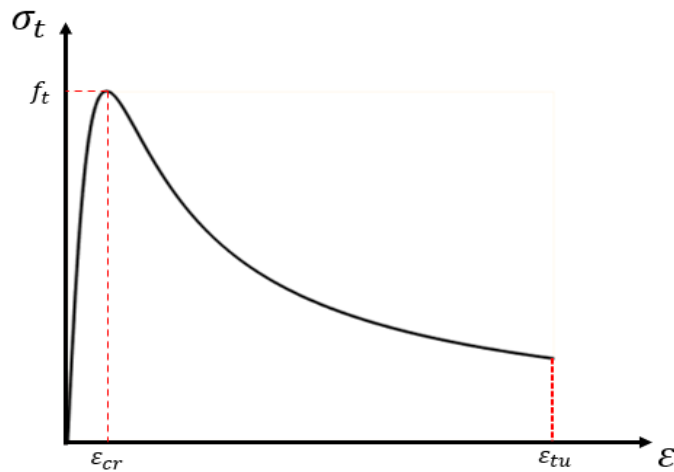
$$\sigma_t = 0$$

(Equação B1.b)

Sendo que:

$\varepsilon_0$  = deformação de tração atribuída;  $\varepsilon_{cr}$  = deformação de fissuração;  $f_{ct}$  = tensão de tração do concreto; E = módulo de elasticidade do concreto;  $\sigma_t$  = tensão de tração correspondente às deformações.

### 2– Modelo de Carreira e Chu (1986)



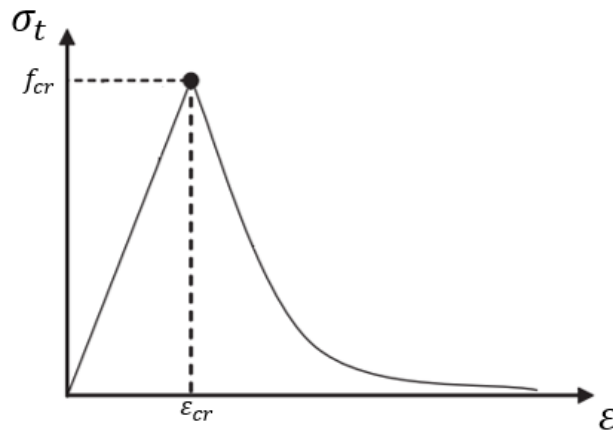
$$\sigma_t = f_t \frac{\beta(\varepsilon_0/\varepsilon_{cr})}{\beta - 1 + (\varepsilon_0/\varepsilon_{cr})^\beta}$$

(Equação B2.a)

Onde:

$f_t$  = tensão de tração correspondente a determinada deformação e  $f_t' =$  ponto de máxima tração, considerado a resistência à tração,  $\varepsilon_t' =$  a deformação correspondente à máxima tração  
 $\varepsilon =$  deformação atribuída,  $\beta =$  parâmetro que depende do formato do diagrama de tensão-deformação,  $f_c' =$  tensão de compressão do concreto,

### 3 – Modelo de Vecchio e Collins (1986)



$$\text{Se } \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{cr} = \frac{f_{ct}}{E}$$

$$\sigma_t = E \cdot \varepsilon_0 \quad (\text{Equação B3.a})$$

$$\text{Se } \varepsilon_0 > \varepsilon_{cr}$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha_1 \alpha_2^2 f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \cdot \varepsilon_0}} \quad (\text{Equação B3.b})$$

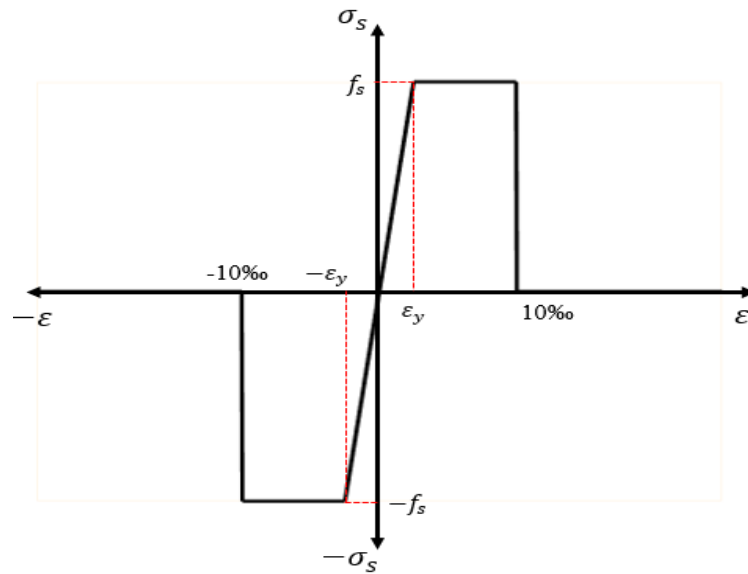
$$f_{cr} = 1.4 \left( \frac{f_t}{10} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Equação B3.c})$$

Onde:

$\sigma_t$  = tensão de tração correspondente a determinada deformação,  $f_{cr}$  = ponto de tensão para o surgimento da primeira fissura,  $\varepsilon_0$  = deformação atribuída,  $f_t$  = tensão de tração do concreto;

## MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O AÇO NA COMPRESSÃO E TRAÇÃO.

1 – Modelo NBR 6118 (2014)



$$\text{Se } abs(\varepsilon) \leq \varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon$$

(Equação C1.a)

$$\text{Se } \varepsilon_y < abs(\varepsilon) \leq 10\text{‰}$$

$$\sigma_s = sign(\varepsilon) \cdot f_y$$

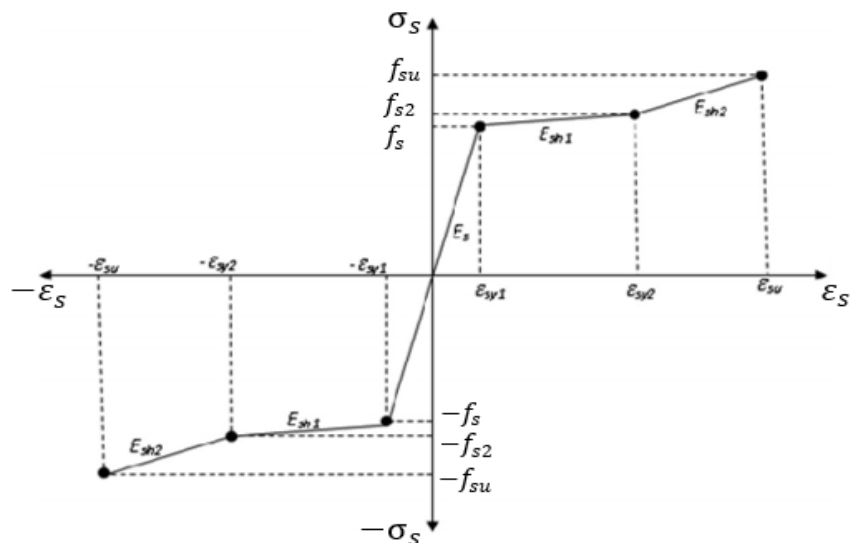
(Equação C1.b)

$$\text{Se } abs(\varepsilon) > 10\text{‰}$$

$$\sigma_s = 0$$

(Equação C1.c)

2 - Chiorean (2017)



Se  $abs(\varepsilon) \leq \varepsilon_{sy1}$

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon \quad (\text{Equação C2.a})$$

Se  $\varepsilon_{sy1} < abs(\varepsilon) \leq \varepsilon_{sy2}$

$$\sigma_s = sign(\varepsilon) \cdot f_{y1} + E_{sh1} (\varepsilon - \varepsilon_{sy1}) \quad (\text{Equação C2.b})$$

Se  $\varepsilon_{sy2} < abs(\varepsilon) \leq \varepsilon_{su}$

$$\sigma_s = sign(\varepsilon) \cdot f_{y2} + E_{sh2} (\varepsilon - \varepsilon_{sy2}) \quad (\text{Equação C2.c})$$

Se  $abs(\varepsilon) > \varepsilon_{su}$

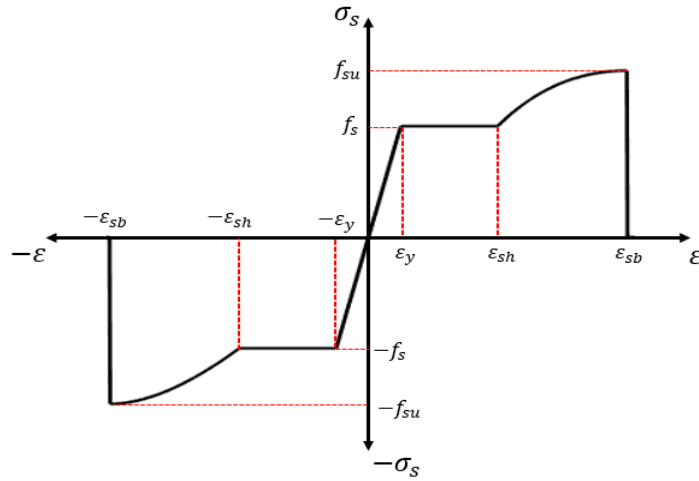
$$\sigma_s = 0 \quad (\text{Equação C2.d})$$

Onde:

sgn é a função sinal que indica + para tração e – na compressão,  $f_{yi}$  representam as tensões de escoamento,  $E_{shi}$  representam as inclinações dos ramos de escoamento,

$$f_{y1} = f_y; f_{y2} = 1.05 * f_y; \varepsilon_{sy1} = \varepsilon_y; \varepsilon_{sy2} = 15\text{‰}; \varepsilon_{su} = 25\text{‰}; E_{sh1} = 100\text{MPa}; E_{sh2} = 100\text{MPa}$$

3– Modelo de Chai *et al.* (1990)



Se  $abs(\varepsilon) \leq \varepsilon_y$

$$\sigma_s = \varepsilon \cdot E_s \quad (\text{Equação C3.a})$$

Se  $\varepsilon_y < abs(\varepsilon) \leq \varepsilon_{sh}$

$$\sigma_s = sign(\varepsilon) \cdot \varepsilon_{sh} \quad (\text{Equação C3.b})$$

Se  $\varepsilon_{sh} < abs(\varepsilon) \leq \varepsilon_{sb}$

$$\sigma_s = \text{sign}(\varepsilon) \cdot f_y \cdot (m \cdot a + 2) + \left( \frac{\text{sign}(\varepsilon) \cdot f_y \cdot a \cdot (60 - m)}{2 \cdot (30 \cdot r + 1)^2} \right) \quad (\text{Equação C3.c})$$

Se  $\text{abs}(\varepsilon) > \varepsilon_{sb}$

$$\sigma_s = 0 \quad (\text{Equação C3.d})$$

$$f_{su} = 1.5 f_y ; r = \text{sign}(\varepsilon) \cdot (\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}) ; a = \varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \cdot \varepsilon_{sh} ; \quad (\text{Equação C3.e})$$

$$m = \frac{\left( \frac{f_{su}}{f_y} \right) \left[ (30r + 1)^2 - 60r - 1 \right]}{15r^2} \quad (\text{Equação C3.f})$$

Onde,  $f_s$  = tensão correspondente ao aço,  $\varepsilon$  = deformação atribuída ao aço,  $E_s$  = módulo de elasticidade do aço,  $f_y$  = tensão de escoamento para o aço,  $\varepsilon_y$  = deformação que gera a tensão de escoamento no aço,  $\varepsilon_{sh}$  = deformação que gera o endurecimento do aço,  $f_{su}$  = tensão máxima suportada pelo aço,  $\varepsilon_{su}$  = deformação máxima suportada pelo aço.

## ANEXO 2 – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Nas seções 3.6 e 3.7 o método de Newton-Raphson foi aplicado à solução do sistema não linear que equilibra a seção transversal, bem como o desenvolvimento da matriz jacobiana. Neste anexo, a atenção está voltada aos fundamentos matemáticos do método clássico.

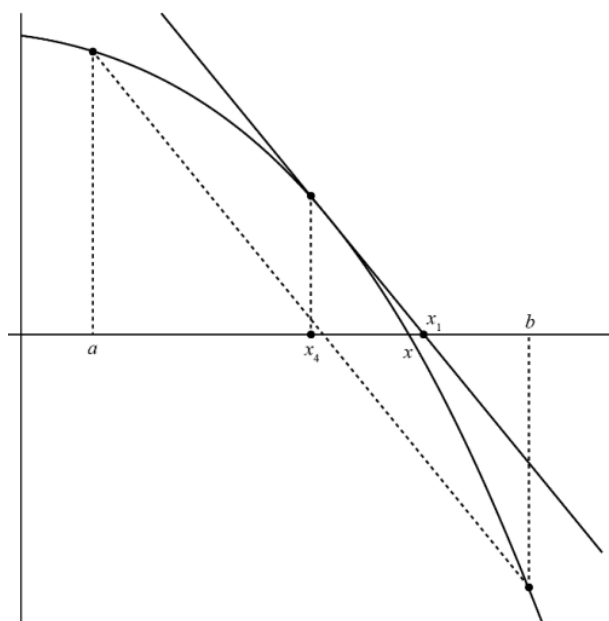
Supõe-se que exista uma solução isolada  $\bar{x}$  da equação  $F(x) = 0$  em um intervalo  $[a, b]$ , e supõe-se que  $F'(x)$ , sendo a primeira derivada da função, exista neste mesmo intervalo. A função de recorrência para o método de Newton-Raphson é:

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} \quad (\text{Equação 2.A})$$

Claramente,  $\bar{x}$  é um ponto fixo de  $f$  e  $x$  é um valor de aproximação para  $\bar{x}$ .

*Teorema 1* – Seja  $\bar{x}$  uma solução isolada da equação  $F(x) = 0$  em  $[a, b]$ . Supõe-se que  $F$  tem continuidade de classe  $C^2$  e que  $F'$  existe no intervalo  $[a, b]$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $\bar{x}$ , na qual a sequência  $(x_n)$  desenvolvida pelo método de Newton converge para  $\bar{x}$ ,  $\forall x_0 \in V$ .

A sequência  $x_{n+1} = f(x)$ , é definida como a iteração necessária para atingir a solução desejada, se essa sequência converge, o limite é a solução desejada, do contrário, adota-se outro valor de  $x_0$  no intervalo  $[a, b]$ .



**Figura 2.A** = Método de Newton-Raphson representado graficamente.



O método de Newton-Raphson tem taxa de convergência quadrática, o seguinte teorema demonstra essa afirmação.

*Teorema 2* – Seja  $\bar{x}$  uma solução isolada da equação  $F(x) = 0$  em  $[a, b]$ . Suponha que  $F'$  existe no intervalo  $[a, b]$ , e que  $F''$  é contínua em  $[a, b]$ . Sendo  $M = \max |F''(x)|/2$  em  $[a, b]$ . Se  $x_0 \in [a, b]$  e  $|x_0 - \bar{x}| < 1/M$ , então a sequência  $(x_n)$  construída pelo método de Newton-Raphson converge para a solução  $\bar{x}$ .

O limite superior do erro cometido ao aproximar  $\bar{x}$  com  $x_n$  é dado por:  $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{M} (M|x_0 - \bar{x}|)^{2^n}$

## ANEXO 3 – INFORMAÇÕES DETALHADAS SOBRE AS SEÇÕES TRANSVERSAIS UTILIZADAS COMO TESTE.

### Diagramas de interação

1 – Seção retangular. Rosati *et al.* (2008)

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
0.30	0
0.30	0.60
0	0.60
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.02	2	0.04	0.04	0.269	0.04
2	0.02	2	0.04	0.56	0.269	0.56
3	0.014	3	0.09	0.037	0.21	0.037
4	0.014	3	0.09	0.563	0.21	0.563
5	0.014	2	0.037	0.21	0.037	0.38
6	0.014	2	0.269	0.21	0.269	0.38

2– Seção em T.

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
0.30	0
0.60	0
0.60	0.75
0.90	0.75
0.90	1
0	1
0	0.75
0.30	0.75
0.30	0
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.014	4	0.037	0.963	0.863	0.963
2	0.014	4	0.037	0.783	0.863	0.783
3	0.014	2	0.337	0.412	0.563	0.412
4	0.014	5	0.337	0.037	0.563	0.037

### 3– Seção em L.

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
1.10	0
1.10	0.30
0.50	0.30
0.50	0.90
0	0.90
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.024	2	0.042	0.042	0.042	0.858
2	0.024	2	0.458	0.858	0.458	0.258
3	0.024	2	1.058	0.042	1.058	0.258
4	0.02	3	0.04	0.246	0.04	0.654
5	0.02	4	0.2452	0.04	0.8548	0.04
6	0.02	2	0.187	0.86	0.3194	0.86
7	0.02	2	0.46	0.458	0.46	0.658
8	0.02	2	0.658	0.26	0.858	0.26

### 4– Seção em U.

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
0.80	0
0.80	0.60
0.60	0.60
0.60	0.20
0.20	0.20
0.20	0.60
0	0.6
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.02	5	0.04	0.04	0.04	0.56
2	0.02	5	0.16	0.04	0.16	0.56
3	0.02	5	0.64	0.04	0.64	0.56
4	0.02	5	0.76	0.04	0.76	0.56
5	0.02	2	0.32	0.17	0.48	0.17
6	0.02	2	0.32	0.04	0.48	0.04

5- Seção em G.

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
1	0
1	0.60
0.60	0.60
0.60	0.40
0.80	0.4
0.80	0.20
0.20	0.20
0.20	0.60
0	0.60
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.024	4	0.042	0.042	0.042	0.558
2	0.024	3	0.158	0.17	0.158	0.558
3	0.024	5	0.1947	0.042	0.958	0.042
4	0.024	4	0.958	0.171	0.958	0.558
5	0.024	3	0.8423	0.1709	0.8423	0.429
6	0.024	2	0.386	0.17	0.614	0.17
7	0.024	2	0.642	0.442	0.642	0.558
8	0.024	2	0.642	0.558	0.80	0.558

6- Seção multicelular.

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
2.5	0
2.5	1.4
2.2001	1.4
2.2001	0.3
1.4	0.3
1.4	1.1
2.2	1.1
2.2	1.4
1.1001	1.4
1.1001	0.3
0.30	0.30
0.30	1.1
1.1	1.1
1.1	1.4
0	1.4
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.032	10	0.046	0.046	2.454	0.046
2	0.032	10	0.046	1.354	2.454	1.354
3	0.032	4	0.254	0.254	1.146	0.254
4	0.032	4	1.396	0.254	22.267	0.254
5	0.032	4	0.254	1.146	1.146	1.146
6	0.032	4	1.354	1.146	2.246	1.146
7	0.032	4	0.046	0.3076	0.046	1.092
8	0.032	2	0.254	0.5514	0.254	0.8487
9	0.032	2	1.146	0.5514	1.146	0.8487
10	0.032	2	1.3696	0.5514	1.3696	0.8487
11	0.032	2	2.2616	0.5514	2.2616	0.8487
12	0.032	4	2.454	0.3076	2.454	1.0924

7 – Seção retangular SILVA (2015)

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
0.30	0
0.30	0.45
0	0.45
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.014553	10	0.03	0.045	0.03	0.405
2	0.014553	10	0.27	0.045	0.27	0.405

8 – Seção vazada. Vaz Rodriguez (2015)

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
2	0
2	2
1.7	2
1.7	1.7
1.7	0.30
0.30	0.30
0.30	1.7
1.69001	1.7
1.69001	2
0	2
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.02	13	0.048	0.048	1.806	0.048
2	0.02	13	1.952	0.048	1.952	1.806
3	0.02	13	0.048	0.1945	0.048	1.952
4	0.02	13	0.1945	1.952	1.952	1.952
5	0.02	11	0.252	0.252	1.6121	0.252
6	0.02	11	1.748	0.258	1.748	1.613
7	0.02	11	1.748	1.7489	0.38925	1.7489
8	0.02	11	0.252	0.3881	0.252	1.7489

#### 9- Seção “staircase”

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
0.4496	0
0.4902	0.2489
0.2489	0.2489
0.2489	2.2504
2.2504	2.2504
2.2504	0.2489
2.0091	0.2489
2.0497	0
2.4993	0
2.4993	2.4993
0	2.4993
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.0219	15	0.03636	0.03635	0.03635	2.46295
2	0.0219	12	0.03652	2.46295	2.46295	2.46295
3	0.0219	14	2.46295	2.46777	2.46295	0.03635
4	0.0219	14	0.20964	0.03635	0.20964	2.28675
5	0.0219	9	0.36693	2.28675	2.044	2.28675
6	0.0219	13	2.28675	2.28403	2.28675	0.03635
7	0.0219	3	0.41325	0.03636	0.45656	0.21255
8	0.0219	3	2.08605	0.03636	2.04274	0.21255

#### Diagramas de momento-curvatura

1– Seção retangular. Simão et al (2016)

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
---	---

0	0
0.30	0
0.30	0.50
0	0.50
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.022	4	0.03	0.05	0.27	0.05
2	0.022	4	0.03	0.45	0.45	0.45

2– Seção circular

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

Theta entre 0 e  $2\pi$ .

x	y
$R*\cos(\theta)$	$R*\sin(\theta)$
R = 0.50	

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.025	2	-0.4575	0	0.4575	0
2	0.025	2	0	-0.4575	0	0.4575
3	0.025	2	-0.3865	0.25	0.3865	0.25
4	0.025	2	-0.3865	-0.25	0.3865	-0.25

3– Seção vazada. AASTHO

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
0.30	0
0.30	0.30
0.30	1.70
3.70	1.70
3.70	0.30
0.30001	0.30
0.30001	0
4	0
4	2
0	2
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.030	23	0.0522	0.0522	3.9478	0.0522
2	0.030	23	0.0522	0.2478	3.9478	0.2478
3	0.030	23	0.0522	1.7522	3.9478	1.7522
4	0.030	23	0.0522	1.9478	3.9478	1.9478

#### 4– Seção em I. AASTHO

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	0
0.46	0
0.46	0.152
0.308	0.304
0.308	0.685
0.384	0.758
0.384	0.91
0.076	0.91
0.076	0.758
0.152	0.685
0.152	0.304
0	0.152
0	0

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.0128	8	0.051	0.051	0.409	0.051
2	0.0128	8	0.051	0.102	0.409	0.102
3	0.0128	6	0.102	0.153	0.358	0.153
4	0.0128	2	0.204	0.204	0.255	0.204
5	0.0128	2	0.127	0.859	0.333	0.859

#### 5 – Seção em pi. Ponte do Suaçuí.

Coordenadas geométricas da seção em ‘m’.

x	y
0	2.35
1.40	1.80
1.40	1.65
1.30	0.40
1.30	0.30
1.80	0
1.80	0
1.70	0.30
1.70	0.40
3.00	1.65
3.00	0.40



2.90	0.30
2.90	0
3.40	0
3.40	0.30
3.30	0.40
3.30	1.65
4.70	1.80
4.70	2.35
4.60	2.35
4.60	1.95
0.10	1.95
0.10	2.35
0	2.35

Informações sobre as camadas das armaduras em ‘m’.

Nº da camada	Diâmetro	Nº barras	xi	yi	xf	yf
1	0.025	5	1.3325	0.0425	1.3325	0.2065
2	0.025	6	1.4325	0.0425	1.4325	0.2475
3	0.025	6	1.4925	0.0425	1.4925	0.2475
4	0.025	6	1.6075	0.0425	1.6075	0.2475
5	0.025	6	1.6675	0.0425	1.6675	0.2475
6	0.025	5	1.7675	0.0425	1.7675	0.2065
7	0.025	5	2.9325	0.0425	2.9325	0.2065
8	0.025	8	3.0325	0.0425	3.0325	0.2475
9	0.025	6	3.0925	0.0425	3.0925	0.2475
10	0.025	6	3.2075	0.0425	3.2075	0.2475
11	0.025	6	3.2675	0.0425	3.2675	0.2475
12	0.025	6	3.3675	0.0425	3.3675	0.2475
13	0.010	7	1.425	0.45	1.425	1.65
14	0.010	7	1.675	0.45	1.675	1.65
15	0.010	7	3.025	0.45	3.025	1.65
16	0.010	7	3.275	0.45	3.275	1.65
17	0.010	5	2.04	1.675	2.64	1.675
18	0.010	5	2.04	1.925	2.64	1.925
19	0.010	3	4.675	1.925	4.675	2.325
20	0.010	2	4.6434	2.325	4.6398	2.125
21	0.010	3	3.424	1.925	4.224	1.925
22	0.010	4	3.424	1.6871	4.675	1.8223
23	0.010	2	3.025	1.925	3.085	1.925
24	0.010	2	3.125	1.925	3.275	1.925
25	0.010	3	0.025	2.325	0.025	1.925
26	0.010	2	0.075	2.325	0.075	2.125
27	0.010	4	0.025	1.8223	1.285	1.6873
28	0.010	3	1.285	1.925	0.485	1.925
29	0.010	2	1.425	1.925	1.485	1.925
30	0.010	2	1.615	1.925	1.675	1.925
31	0.010	2	1.8317	1.675	1.84	1.925
32	0.010	2	2.84	1.675	2.84	1.925

## ANEXO 4 – INSTRUÇÕES PARA MANUSEIO DO *RCSectionCode*.

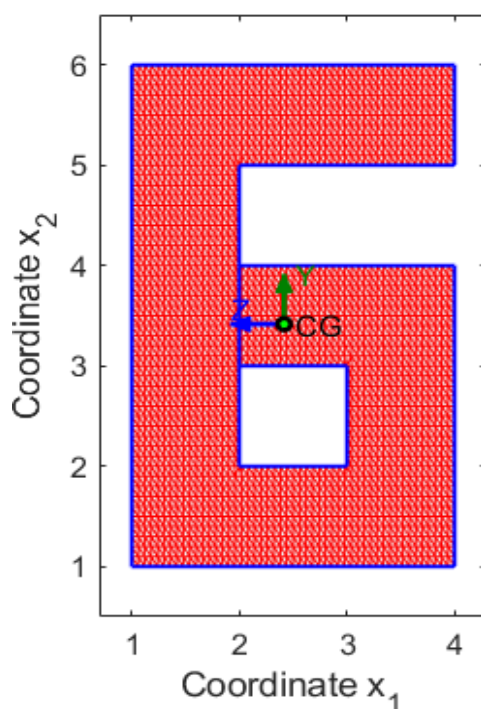
A seguir serão apresentadas as instruções básicas para o correto manuseio para input de dados das seções a serem estudadas, bem como para uma possível modificação, ou acréscimo da biblioteca de modelos constitutivos.

### # Entrada de dados

1º passo = inserir as coordenadas do polígono na estrutura de dados “*Section.Concrete.Coord.*”

Observação 1 = o polígono deve ser fechado, isto é, incluir ponto final igual ao ponto inicial;

Observação 2 = o polígono pode ser desenhado no sentido horário ou anti-horário, no entanto, para a inclusão de furos na seção transversal é necessário que o sentido do desenho seja oposto ao do furo, isto é, o polígono é desenhado no sentido horário e o furo no sentido anti-horário.



**Figura 3.A:** Inclusão de furos nas seções transversais.

2º passo = divisão de grade para a triangulação de Delaunay.

Nesta seção é necessário entrar com a divisão da grade horizontal e transversal. Isto deve ser feito na estrutura de dados “*Sectio.Concrete.nx*” e “*Section.Concrete.ny*”.

Observação 1 = os valores da discretização devem ser inteiros positivos.

```

% (2) Divisões da grade =====

Section.Concrete.nx = 50; % divisão da grade em x
Section.Concrete.ny = 50; % divisão da grade em y

```

**Figura 3.B:** Imagem extraída do programa no qual se pode ajustar a triangulação de Delaunay.

3º passo = propriedades do concreto.

Nesta seção é possível definir as tensões de tração e compressão do concreto, assim como os respectivos modelos constitutivos e o módulo de elasticidade. As unidades de tensão devem ser inseridas em KN/m<sup>2</sup>.

As estruturas de dados que comportam esses dados são:

*Section.Concrete.fc* = entrada da tensão de compressão (KN/m<sup>2</sup>);

*Section.Concrete.Ec* = entrada para o módulo de elasticidade (KN/m<sup>2</sup>) ;

*Section.Concrete.Compressive\_Law* = modelo constitutivo de compressão;

*Section.Concrete.ft* = entrada para a tensão de tração (KN/m<sup>2</sup>);

*Section.Concrete.Tension\_Law* = modelo constitutivo de tração;

```

Section.Concrete.Ec = 40000;           % Módulo de Elasticidade concreto
Section.Concrete.fc = 40;              % Resistência à compressão
Section.Concrete.Compressive_Law = 1;  % Consultar código acima
Section.Concrete.ft = 4;               % Resistência à tração;
Section.Concrete.Tension_Law = 1;      % Consultar código acima

```

**Figura 3.C:** Imagem extraída do programa onde é possível atribuir as características mecânicas do concreto.

4º passo = camadas e propriedades do material das barras longitudinais.

Uma camada (*layer*) é um conjunto de barras de mesmo diâmetro e mesmo material separadas por espaçamentos iguais.

Observação 1 = para seções com múltiplas camadas é possível replicar quantas camadas forem necessárias, desta maneira mudando o identificador de camadas (ID) no campo *layer(i)*, *i* = 1, 2 ... *n*, até atingir o número de camadas desejado.

Observação 2 = cada camada deve conter, no mínimo, 2 barras.

Observação 3 = para as coordenadas iniciais e finais de cada camada, o diâmetro da barra deve ser levado em consideração, isto é, a coordenada inicial é o cobrimento mais a metade do diâmetro da barra em cada camada.

As estruturas de dados que contemplam os dados das camadas são:

`Section.Rebar.Layer(i).Coord_i = [xi yi];` coordenada do ponto inicial (m);  
`Section.Rebar.Layer(i).Coord_f = [xf yf];` coordenada do ponto final (m);  
`Section.Rebar.Layer(i).Num_Bar =` número de barras da camada (und);  
`Section.Rebar.Layer(i).Diam =` diâmetro das barras da camada (m);  
`Section.Rebar.Layer(i).fy =` tensão de escoamento (KN/m<sup>2</sup>);  
`Section.Rebar.Layer(i).Es =` módulo de elasticidade (KN/m<sup>2</sup>);  
`Section.Rebar.Layer(i).Constitutive_Model =` modelo constitutivo do aço.

```

% Camada 1:
%
%           x (m)      y (m)
Section.Rebar.Layer(1).Coord_i = [0.03 0.045];
Section.Rebar.Layer(1).Coord_f = [0.03 0.405];
Section.Rebar.Layer(1).Num_Bar = 10;
Section.Rebar.Layer(1).Diam     = 0.014553;
Section.Rebar.Layer(1).fy       = 434.78e3;
Section.Rebar.Layer(1).Es       = 210e6;
Section.Rebar.Layer(1).Constitutive_Model = 1;
  
```

**Figura 3.D:** Imagem extraída do programa onde é possível inserir as coordenadas e propriedades mecânicas das barras de aço.

5º passo = opção de plotagem da figura com a discretização da seção.

`Section.Plot_Option = 'sim' ou 'não'.`

6º passo = dados para o cálculo da superfície de interação.

Observação 1 = na seção '`Section.Surface.Nint_target`' o sinal positivo indica tração e o sinal negativo indica compressão;

Observação 2 = na seção '`Section.Surface.Sext`' o sinal negativo indica tração e o sinal positivo indica compressão, para os momentos, o sentido horário é positivo e o anti-horário é negativo;

Observação 3 = as unidades de força e momento são medidas em (KN) e KN.m, respectivamente.

As estruturas de dados que contemplam os dados para o cálculo da superfície de interação são:

`Section.Surface.Option = 'sim' ou 'não';`

`Section.Surface.dalpha =` incremento de ângulo de rotação da seção [graus]

`Section.Surface.alpha_target =` angulo alvo para plotagem do diagrama de interação [graus]

`Section.Surface.Nint_target =` esforço normal interno alvo para traçado do diagrama de interação [KN]

`Section.Surface.Sext =` esforços solicitantes [Next Mzext Myext][KN KN.m KN.m]

```
% (6) Gera Superfície de Interação =====
Section.Surface.Option      = 'sim';
Section.Surface.dalpha     = 15;
Section.Surface.alpha_target = 45;
Section.Surface.Nint_target = -965;
Section.Surface.Sext       = [965 54.3 217];
```

**Figura 3.E:** Seção destinada à caracterização dos esforços externos que solicitarão à seção em estudo.

7º passo = dados para o cálculo do diagrama de momento vs curvatura.

Observação 1 = na seção '*Section.MomentCurvature.alpha\_target*' o sinal positivo indica tração e o sinal negativo indica compressão;

*Section.MomentCurvature.Option* = 'sim' ou 'não';

*Section.MomentCurvature.Ninter* = número máximo de interações para o algoritmo de Newton-Raphson;

*Section.MomentCurvature.Tol* = tolerância para o algoritmo de Newton-Raphson;

*Section.MomentCurvature.alpha\_target* = ângulo alvo para plotagem do diagrama Momento vs Curvatura [graus];

*Section.MomentCurvature.N\_target* = esforço normal interno alvo para traçado do diagrama Momento vs Curvatura [kN];

*Section.MomentCurvature.phi\_max* = valor máximo de curvatura para o traçado do diagrama [1/m];

*Section.MomentCurvature.npoints* = número de pontos para traçado do diagrama Momento vs Curvatura.

```
% (7) Gera Diagrama Momento vs Curvatura =====
Section.MomentCurvature.Option      = 'sim';
Section.MomentCurvature.Ninter      = 100;
Section.MomentCurvature.Tol         = 1e-6;
Section.MomentCurvature.alpha_target = 0;
Section.MomentCurvature.N_target    = -965;
Section.MomentCurvature.phi_max     = 20e-3;
Section.MomentCurvature.npoints     = 200;
```

**Figura 3.F:** Seção destinada para a caracterização o diagrama de momento curvatura.

8º passo = salvar os relatórios da análise.

Nesta opção é possível escolher em salvar ou não os relatórios com os dados da discretização (coordenadas do incentro de cada triângulo e coordenadas dos centros geométricos das barras longitudinais).

*Section.Save\_Option* = 'sim' ou 'não'.

### **# Funções de processamento**

O *RCSection.Code* possui as seguintes funções de processamento para a execução de todas as verificações às quais se propõe:

*ConcreteCompressiveModel* = contém os modelos constitutivos de compressão do concreto;

*ConcreteTensioModel* = contém os modelos constitutivos de tração do concreto;

*InteractionSurface* = calcula da superfície de interação (modificar resultados);

*MomentCurvature* = calcula do diagrama de momento vs curvatura;

*NBR6118StrainDomain* = contém os domínios de deformação, pelo método de Werner (1974), para o cálculo da superfície de interação;

*RebarSteelModel* = modelos constitutivos para as barras longitudinais;

*SectionDiscretization* = calcula a Triangulação de Delaunay;

*SectionForcesStiffness* = calcula da matriz de rigidez para o momento-curvatura;

*SectionRotation* = calcula a rotação da seção para o cálculo do diagrama de interação;

*DrawArrow* = desenha o centro geométrico da seção na figura da discretização;

*GeometricProp* = calcula as propriedades geométricas da seção;

*InteractionSurfaceFilePrint* = salva os resultados da superfície de interação em um relatório txt;

*MomentCurvatureFilePrint* = salva os resultados do momento – curvatura em um relatório txt;

*PreprocessingFilePrint* = salva o resultado da triangulação de Delaunay em um relatório txt.

## ***RCSectionCode V2 – Funções de Pré-processamento***

Estrutura de dados para entrada das variáveis.

$$\text{Section} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Concrete} \begin{bmatrix} \text{Pr operties} \\ \text{Fiber} \end{bmatrix} \\ \text{Rebar} \begin{bmatrix} \text{Pro perties} \\ \text{ys _rotated} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

### **Concreto**

$$\begin{matrix} \text{Section.Concrete} \left\{ \begin{array}{l} \text{Coord} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \end{bmatrix} = \text{coordenadas da seção de concreto} \\ \\ n_x = \text{número de divisões horizontais para a discretização da seção.} \\ n_y = \text{número de divisões verticais para a discretização da seção.} \\ E_c = \text{módulo de elasticidade tangente inicial.} \\ f_c = \text{resistência à compressão do concreto.} \\ \text{Compressive\_law} = \text{indicador do modelo uniaxial de compressão} \\ \text{Tension\_law} = \text{indicador do modelo uniaxial de tração} \\ \text{Fiber} = \text{campo com os dados das fibras} \\ \text{Area} = \text{área da poligonal de concreto} \\ \text{CG} = \text{coordenadas do centro de gravidade da seção de concreto em} \\ \text{relação ao sistema de coordenadas definidas pelo usuário } \begin{bmatrix} x_{cg} & y_{cg} \end{bmatrix} \end{array} \right. \\ \\ \text{Section.Concret.fibee} \left\{ \begin{array}{l} A_{ej} = \begin{bmatrix} A_{c1} \\ A_{c2} \\ \vdots \\ A_{ci} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{fibra\_1} \\ \text{fibra\_2} \\ \vdots \\ \text{fibra\_i} \end{matrix} = \text{área das fibras} \\ \\ \text{Coord\_cg} = \begin{bmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ z_i & y_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{fibra\_1} \\ \text{fibra\_2} \\ \vdots \\ \text{fibra\_i} \end{matrix} = \text{coordenadas das fibras com relação} \\ \text{ao sistema zy posicionado no CG.} \\ \\ \text{Coord\_rotated} = \begin{bmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ z_i & y_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{fibra\_1} \\ \text{fibra\_2} \\ \vdots \\ \text{fibra\_i} \end{matrix} = \text{coordenadas das fibras} \\ \text{com relação ao sistema zy rotacionadas em um ângulo } \alpha . \end{array} \right. \end{matrix}$$

$y_{c\_rotated}$  = distância do CG à fibra superior mais externa (sistema rotacionado)

### Aço

*Section.Rebar.Layer(i)*

$\text{Coord\_i} = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix}$  = coordenadas do ponto inicial da barra de aço no sistema do usuário.

$\text{Coord\_f} = \begin{bmatrix} x_f & y_f \end{bmatrix}$  = coordenadas do ponto final da barra de aço no sistema do usuário.

$\text{Num\_bar}$  = número de barras da camada.

$E_c$  = módulo de elasticidade tangente inicial.

$f_s$  = tensão de escoamento do aço de cada camada (todas as barras da camada devem ter o mesmo aço).

$\text{Constitutive\_model}$  = indicar o modelo constitutivo do aço da camada

$\text{Coord\_user} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_i & y_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{barra\_1} \\ \text{barra\_2} \\ \text{barra\_i} \end{matrix}$  = coordenadas das barras com

relação ao sistema zy posicionado no CG.

$\text{Coord\_cg} = \begin{bmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \\ z_i & y_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{barra\_1} \\ \text{barra\_2} \\ \text{barra\_i} \end{matrix}$  = coordenadas das barras com

relação ao sistema zy posicionado no CG.

$\text{Coord\_rotated} = \begin{bmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \\ z_i & y_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{barra\_1} \\ \text{barra\_2} \\ \text{barra\_i} \end{matrix}$  = coordenadas das barras com

relação ao sistema zy rotacionadas em um ângulo  $\alpha$ .

*Section.Concret.y<sub>s\_rotated</sub>* = coordenada da barra de aço inferior mais distante do cg (sistema rotacionado).